Prof.: **EDUARDO BRASIL** - MATEMÀTICA

DETERMINANTES – SOLUÇAO DOS EXERCÍCIOS

Pág. 4 – Determinante de 2ª ordem e Regra de Sarrus

Exercício 1

a) det A= $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-5)\times(-1)-(3)\times(2) = -1$

b) det B= $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (6)\times(3)-(2)\times(-4) = 26$

c)det C= $\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right| = 12+12+60-10-27-32 = 15$

d)det D= $\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & -2 \end{array}\right| = 12-30 = -18$

Exercício 2

a) $\begin{vmatrix} x & x+3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$

$8\times x - 4\times(x+3) = 0 \Rightarrow 4x-12=0 \Rightarrow x=3$

b) $\begin{vmatrix} x+3 & 5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

$(x+3)\times(x-1)-5\times1 = 0 \Rightarrow x^2+2x-8=0 \quad \Rightarrow$

$x=-4 \quad ou \quad x=2$

c) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & x & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right| = 0$

$16+12x+2-12-2x-16 = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x-10=0$

$x = 11$

d) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x & 0 & 1 \\ 2 & x & -3 & 2 & x \end{array}\right| = 2$

$-6+6x+4-2x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad -2x^2+6x-4=0$

$2x^2-6x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad ou \quad x=2$

Pág. 8 e 9 – Propriedades dos determinantes

Utilizando as propriedades das páginas 5 a 8, temos:

Exercício 1.

a) $det = 0,\ pela\ propriedade\ 2, pois\ L_2 = 0.$

b) $det = 0,\ pela\ propriedade\ 3, pois\ C_1 = C_4.$

c) $det = 0,\ pela\ propriedade\ 4, pois\ L_3 = 3L_1.$

d) $det = -24,\ pela\ propriedade\ 6,\ \ pois$

$det = 1\times4\times2\times(-3) = -24$

Exercício 2.

a) $det = \frac{1}{9}\times(det\ \ A) = \frac{1}{9}\times27 = 3$

$pela\ propriedade\ 9, pois\ a\ 1^{a}\ linha\ dessa\ matriz$

$\acute{e}\ igual\ a\ \frac{1}{9}\times L_1\ \ da\ matriz\ A.$

b) $det = 20\times(det\ \ A) = 20\times27 = 540$

$pela\ propriedade\ 9, pois\ a\ 2^{a}\ linha\ dessa\ matriz$

$\acute{e}\ igual\ a\ 20\times\ L_2\ \ da\ matriz\ A.$

Exercício 3.

a) $Pela\ propriedade\ 10,$

$det\ \ (KA) = K^n\times(det\ \ A)$

$det\ (4A) = 4^3\times6 = 64\times6 = 384$

b) $Pela\ propriedade\ 10,$

$det\ \ (KA) = K^n\times(det\ \ A)$

$det\ \left(\frac{1}{2}A\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3\times6 = \frac{1}{8}\times6 = \frac{3}{4}$

Exercício 4.

a) $Pela\ propriedade\ 7,$

$$det\ (AB) = det\ A \times det\ B$$

$$det\ (AB) = 8 \times (-3) = -24$$

b) a) *Pela propriedade* 7,

$$det\ (AB) = det\ A \times det\ B$$

$$det\ (AB) = \frac{1}{3} \times 12 = 4$$

c) *Consequência da propriedade* 7, *determinante da matriz inversa*

$$det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A}$$

$$det\ A^{-1} = \frac{1}{4}$$

Pág. 13 – Teorema de Laplace

Para usar o teorema de Laplace calculamos também o cofator de uma matriz

Exercício

a) Escolhemos L_1.

Cálculo do $det\ A$

$\text{Fórmula do determinante:}\qquad det\ A = (\sum a_{ij}) \times A_{ij}$

$$det\ A = a_{11} \times A_{11} + a_{12} \times A_{12} + a_{13} \times A_{13} + a_{14} \times A_{14}$$

$$det\ A = 0 \times A_{11} + 0 \times A_{12} + 0 \times A_{13} + 3 \times A_{14}$$

$$det\ A = 3 \times A_{14} \quad \textbf{(equação 1)}$$

Cálculo do cofator A_{14}

$\text{Fórmula do cofator:}\qquad A_{ij} = (-1)^{i+j} \times D_{ij}$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \times D_{14} = (-1)^5 \times D_{14} = -D_{14}$$

$$A_{14} = -D_{14}$$

Cálculo do determinante da matriz resultante, D_{14}

$$D_{14} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 5 & -2 & 2 \end{array}\right| = -7$$

$$Portanto\ A_{14} = -(-7) = 7 \qquad \textbf{(equação 2)}$$

Substituindo a equação 2, na equação 1, temos:

$$det\ A = 3 \times A_{14} = 3 \times 7$$

$$det\ A = 21$$

b) Escolhemos C_2.

Cálculo do $det\ B$

$\text{Fórmula do determinante:}\qquad det\ B = (\sum b_{ij}) \times B_{ij}$

$$det\ B = b_{12} \times B_{12} + b_{22} \times B_{22} + b_{32} \times B_{32} + b_{42} \times B_{42}$$

$$det\ B = 3 \times B_{12} + 0 \times B_{22} + 0 \times B_{32} + 2 \times B_{42}$$

$$det\ B = 3 \times B_{12} + 2 \times B_{42} \quad \textbf{(equação 1)}$$

Cálculo do cofator B_{12}

$\text{Fórmula do cofator:}\qquad B_{ij} = (-1)^{i+j} \times D_{ij}$

$$B_{12} = (-1)^{1+2} \times D_{12} = (-1)^3 \times D_{12} = -D_{12}$$

$$B_{12} = -D_{12}$$

Cálculo do determinante da matriz resultante, D_{12}

$$D_{14} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right| = 28$$

$$Portanto\ B_{12} = -(28) = -28 \quad \textbf{(equação 2)}$$

Cálculo do cofator B_{42}

$\text{Fórmula do cofator:}\qquad B_{ij} = (-1)^{i+j} \times D_{ij}$

$$B_{42} = (-1)^{4+2} \times D_{42} = (-1)^6 \times D_{42} = D_{42}$$

$$B_{42} = D_{42}$$

Cálculo do determinante da matriz resultante, D_{42}

$$D_{42} = \left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right| = 7$$

$$Portanto\ B_{42} = 7 \qquad \textbf{(equação 3)}$$

Substituindo a equação 2 e a equação 3, na equação 1, temos:

$$\boldsymbol{det\ B = 3\ \times B_{12} +\ 2 \times B_{42} = 3\ \times (-28) + 2 \times 7}$$

$$\boldsymbol{det\ B = -70}$$