Determinantes

Como já vimos, **matriz quadrada** é uma matriz que apresenta o número de linhas igual ao número de colunas. Toda matriz quadrada está associada um número que denominamos de **determinante.**

Usualmente representamos determinante por det(A) ou |A| ou det[aij].

Determinante de 1ª ordem

Se A é de ordem **n = 1**, então det (A) é o único elemento de A.

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem A = [a_{11}], o seu determinante será o número real a_{11}:

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

Por exemplo:

A = [7] => det A = 7 ou I 7 I = 7

B = [-4] => det B = -4 ou I -4 I = -4

Determinante de 2ª ordem

Se A é de ordem **n = 2**, então det (A) é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$:

det A = $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow$ det A = $1 \,.\, 3 - (-4).(-2)$ = 3 – (+ 8) = 3 – 8 = - 5

det A = - *5*

Determinante de 3ª ordem

Regra de Sarrus

O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado *regra de* ***Sarrus.***

1º) Repetem-se as duas primeiras colunas à direita do quadro dos elementos da matriz *A*.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2º) Multiplicam-se os três elementos da diagonal principal, bem como os três elementos de cada paralela a essa diagonal, fazendo-se preceder os produtos do sinal **+**.

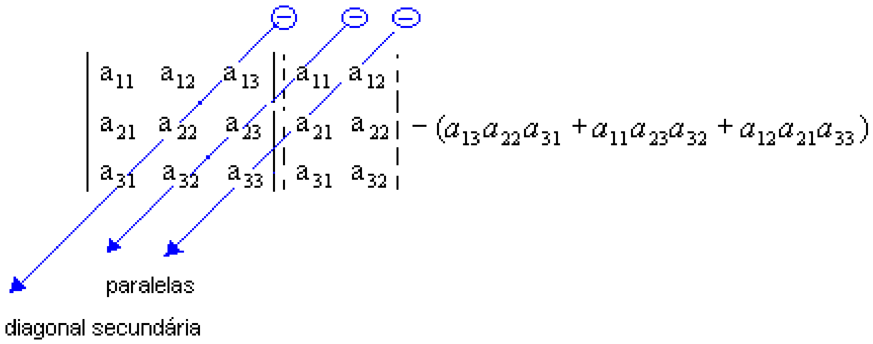
$$\begin{matrix} \oplus & \oplus & \oplus & & \\ \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} + (a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

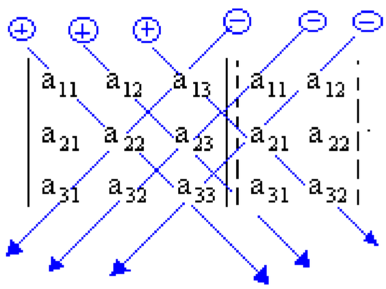
paralelas

diagonal principal

3º) Multiplicam-se os três elementos da diagonal secundária, bem como os três elementos de cada paralela a essa diagonal, fazendo-se preceder os produtos do sinal **–**.



Assim:



$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exercícios resolvidos

1) Calcule o determinante da matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{detA} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right. \Rightarrow (5 + 6 - 16) - (10 - 4 + 12) = -5 - 18$$

detA = -23

2) Resolva as equações $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$

Calculando os determinantes, temos:

a) $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7x - 5(x+2) = 0 \Rightarrow 7x - 5x - 10 = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

3) Encontre a solução da equação $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & n-1 \\ n & 0 & n \end{vmatrix} = 12.$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & n-1 \\ n & 0 & n \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ n & 0 \end{matrix} = 12 \Rightarrow (-2n + n(n-1) + 0) - (-3n + 0 + 4n) = 12$$

$$(-2n + n^2 - n) - n = 12 \Rightarrow n^2 - 4n - 12 = 0$$

$$n = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.1.(-12)}}{2} \Rightarrow n = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow n = \frac{4 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -2 \end{cases}$$

S = { 6, -2 }

Exercícios

1) Ache o valor do determinante das seguintes matrizes:

a) A = $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) B = $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) C = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

d) D = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

2) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} x & x+3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x+3 & 5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & x \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & -3 \end{vmatrix} = 2$

Propriedades dos determinantes

1) O determinante de uma matriz *A* é igual ao determinante de sua transposta A^T , isto é, det *A* = det A^T

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

det A = 2.3 – 5.7 = 6 – 35 = – 29

det A^T = 2.3 – 7.5 = 6 – 35 = – 29

2) Se a matriz *A* possui uma linha (ou coluna) constituída de elementos todos nulos, o determinante de *A* é nulo.

$det\ A = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 0$

3) Se a matriz *A* tem duas linhas (ou colunas) iguais, o determinante de *A* é nulo.

Ex: $det\ A = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ $C_1 = C_2$

4) Se a matriz *A* tem duas linhas (ou colunas) onde seus elementos correspondentes são proporcionais, o determinante de *A* é nulo.

Ex: det *A* = $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$ $C_2 = 2C_1$

Ex: det *A* = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $L_2 = 3L_1$

5) Se os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

Ex: det A = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix}$ = 0

$2C_1 + C_2 = C_3$

6) O determinante de uma matriz A triangular (superior ou inferior) é igual ao termo principal, ou seja, é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Ex: det A = $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 8

det A = 4 .1. 2 = 8 (produto dos elementos da diagonal principal).

Ex2: det A = $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ = 20

7) **Se** A e **B** são matrizes quadradas de mesma ordem **n**, então det $(A \cdot B)$ = det A . det B

Ex: det A = 3 , det B = 5, logo det $(A \cdot B)$ = 3 . 5 = 15

Observação:

Determinante da matriz inversa

Sabe-se que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$, então:

det $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1})$ = det $\mathbf{I}_n$ => det $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1})$ = 1 => det $\mathbf{A}$. det $\mathbf{A}^{-1}$ = 1 , logo

det $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}$

Ex: Se det A = 5, então det $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{5}$

8) Se trocarmos entre si duas linhas (ou colunas) de uma matriz *A*, o determinante dela muda de sinal.

Ex: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix}$ = - 8 $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 8 trocou L_2 com L_3

Logo det *A* = - det *B.*

9) Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) por uma constante real, o determinante da nova matriz fica multiplicado por essa constante.

Ex: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = - 1 *multiplicando L1 por 2* $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = - 2

2. L_1

Assim det *B* = 2.det *A.*

10) Se uma matriz quadrada A de ordem **n** for multiplicada por um número real **k**, seu determinante passa a ser multiplicado por k^n.
det (k.A) = k^n *. det A*

det *A* = $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow$ det *A* = $5 \cdot 3 - (4).(2)$ = 15 - 8 = 7

Como det A = 7 e a matriz de ordem n = 2, então det 3A = 3^2 . 7 = 63

Exercícios

1) Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 9 & 7 & 2 \\ -3 & 5 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ -3 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

2) Sabendo que A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e que detA = 27, calcule o valor do determinante das matrizes:

a) $\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 20 & 80 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3) Considere uma matriz A, 3 x 3, cujo determinante é 6. Calcule o determinante das matrizes:

a) 4A

b) $\frac{1}{2}$A

4) Dadas as matrizes quadradas A e B, determine o que se pede:

a) det(AB), sabendo que detA = 8 e detB = -3;

b) det(AB), sabendo que detA = $\frac{1}{3}$ e detB = 12;

c) $\det A^{-1}$, sabendo que detA = 4.

Teorema de Laplace

Os conceitos aprendidos anteriormente sobre o cálculo do determinante se aplicam em matrizes com ordem menor ou igual a três, onde nos nossos estudos serão mais utilizados.

Contudo, nem todas as matrizes serão com esta ordem. Para isso, necessitamos de um método para nos auxiliar quanto aos determinantes de matrizes com ordem maior que três.

Um desses métodos é o **Teorema de Laplace que** foi desenvolvido pelo matemático e físico Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

O **teorema de Laplace** pode ser aplicado a qualquer matriz quadrada. Entretanto, para as matrizes de ordem 2 e 3 é mais fácil utilizarmos os outros métodos dados anteriormente.

Para apresentarmos o **Teorema de Laplace** teremos que saber o que **é o cofator de** uma matriz.

Cofator

Cada elemento de uma matriz quadrada possui o seu respectivo cofator, sendo este **cofator** um valor numérico, que é obtido através da expressão a seguir:

$$\mathbf{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}}$$

Onde,

A_{ij} - cofator de um elemento **a_{ij}**
i - linha onde se encontra o elemento
j - coluna onde se encontra o elemento
D_{ij} - é o determinante da matriz resultante da eliminação da linha i e da coluna j.

Exemplo

Determine o cofator do elemento a_{32}, da matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular o cofator do elemento a_{32}, vamos começar calculando o determinante da matriz resultante da eliminação da linha 3 e coluna 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$D_{32} = = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 . 1 - 4 . 3 = 1 - 12 = -11$

Assim,

$A_{ij} = (-1)^{i+j} . D_{ij}$

$A_{32} = (-1)^{3+2} . (-11)$

$A_{32} = (-1)^{5} . (-11)$

$A_{32} = (-1) . (-11) = 11$

Portanto, o cofator do elemento a_{23} da matriz A é igual a **11**.

Agora podemos voltar ao **Teorema de Laplace.**

Para calcular os determinantes utilizando o **Teorema de Laplace**, devemos seguir os seguintes passos:

1º) Escolhemos arbitrariamente uma fila (linha ou coluna), dando preferência a fila que contenha a maior quantidade de elementos igual a zero, pois torna os cálculos mais simples.

2º) Somar os produtos dos números da fila escolhida pelos seus respectivos **cofatores**. $\left(\sum \boldsymbol{a_{ij}} \, . \, \boldsymbol{A_{ij}}\right)$

Exemplo:

Determine o determinante da matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

Iremos selecionar a linha 1, já que nela há dois elementos iguais a zero.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \sum \boldsymbol{a_{ij}} \, . \, \boldsymbol{A_{ij}}$$

$$D = \quad a_{21} \, . \, A_{21} + a_{22} \, . \, A_{22} + a_{23} \, . \, A_{23} + a_{24} \, . \, A_{24}$$

$$D = 1 \, . \, A_{21} + 2 \, . A_{22} + 0 \, . A_{23} + 0 \, . A_{24}$$

Como zero multiplicado por qualquer número é zero, o determinante ficará:
$D = 1 \, . \, A_{21} + 2 \, . A_{22}$.

Nesse caso, vamos então calcular somente os cofatores A_{21} e A_{22} .

Cálculo de A_{21} .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-96) = 96$

Cálculo de A_{22} .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-42) = -42$

Substituindo os valores encontrados na expressão do determinante, temos:

$D = 1 \cdot A_{21} + 2 \cdot A_{22}$.

D = 1 . 96 + 2 . (-42) = 96 - 84 = 12

Exercícios:

Calcular o determinante das matrizes abaixo, usando Laplace:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$