

Gabarito números complexos na forma trigonométrica

1) Determine o módulo dos números complexos:

a) $Z = 4 - i$

b) $Z = -3 - j4$

c) $Z = -5i$

Resolução

a) $Z = 4 - i$

Formula do módulo $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = 4$ e $b = -1$. Vamos ao módulo $\rho = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1}$

Resposta: $\rho = \sqrt{17}$

b) $Z = -3 - j4$

$$\rho = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

Resposta: $\rho = 5$

a) $Z = -5i$ $a = 0$ e $b = -5$

Resolução

$$\rho = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25}$$

Resposta: $\rho = 5$

2) Determine o módulo, o argumento e a representação geométrica do número complexo $Z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

Resolução

$$\rho = ?$$

$$A = 2 \text{ e } b = 2\sqrt{3}$$

$$\rho = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{4 + 12} .$$

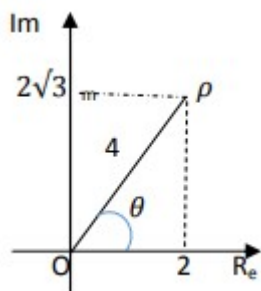
$$\rho = \sqrt{16}$$

$$\rho = 4$$

Calculando o argumento θ

O argumento é o ângulo que chamaremos de **teta** (θ)

Representação do módulo no plano cartesiano



No triângulo retângulo, temos $\overline{2\rho}$ cateto oposto e $\overline{O2}$ cateto adjacente ao ângulo teta. Logo:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{2\rho}}{\overline{O2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} .$$

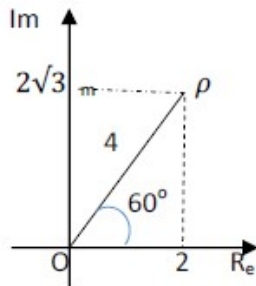
θ é o arco cuja tangente é $\sqrt{3}$ ou $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{3}$. Observando o gráfico, verificamos que θ está no 1º quadrante, logo:

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ ou } 60^\circ$$

Resposta: O argumento mede 60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad.

OBS: O argumento é medido no sentido anti-horário

Representação geométrica



3) Represente graficamente os números complexos abaixo.

a) $Z = 2i$

b) $Z = -5$

c) $Z = 1 + i$

d) $Z = 1 - j\sqrt{3}$

e) $Z = -1 - j$

a) $Z = 2i$

Resolução

$$Z = 0 + 2i \quad a = 0 \text{ e } b = 2$$

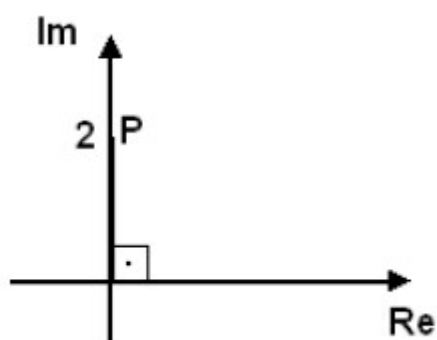
$$\rho = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4}$$

$$\rho = 2$$

$$\theta = \text{Arctg} \frac{b}{a} = \text{Arcotg} \frac{2}{0}$$

Como não existe divisão por zero, esse arco também não existe. Portanto *mede* 90° .

Gráfico



b) $Z = -5$

Resolução

$$Z = -5 + 0i$$

$a = -5$ e $b = 0$

$$\rho = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\rho = 5$$

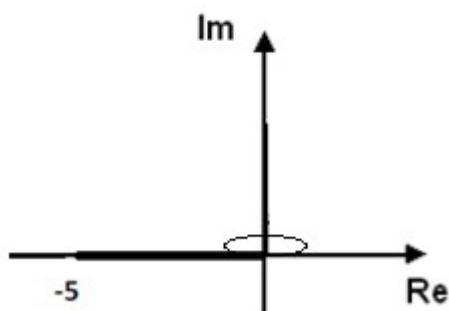
$$\theta = \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{Arctg} \frac{0}{-5} = 0$$

$\theta = \operatorname{Arctg} 0$, como 0 é o Arctg de 0, substituindo temos:

$\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 180^\circ$. Como $a = -5$ e $b = 0$, o afixo está na fronteira do segundo quadrante, portanto:

$$\theta = 180^\circ$$

Gráfico



c) $Z = 1 + i$

Resolução

$a = 1$ e $b = 1$

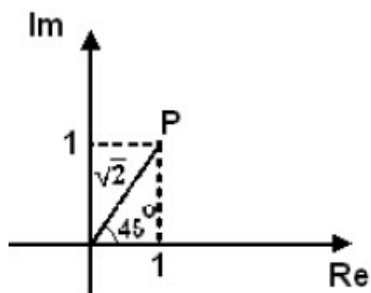
$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\rho = \sqrt{2}$$

$$\theta = \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{Arctg} \frac{1}{1} = \operatorname{Arctg} 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

Como $a = 1$ e $b = 1$, $P(1,1)$ está no 1º quadrante, então $\theta = 45^\circ$ ou $\frac{\pi}{4}$.



d) $Z = 1 - j\sqrt{3}$

$a = 1$ e $b = -\sqrt{3}$

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$\rho = 2$

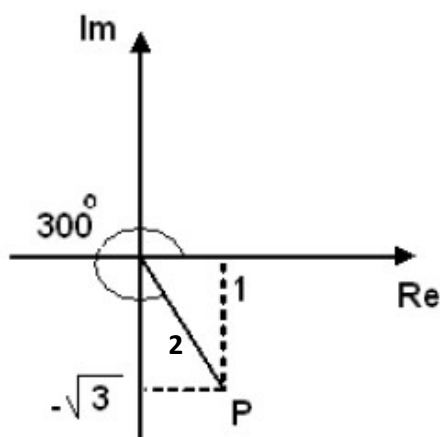
$$\theta = \text{Arctg} \frac{b}{a} = \text{Arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = \text{Arctg} -\sqrt{3}$$

$\emptyset = 60^\circ$

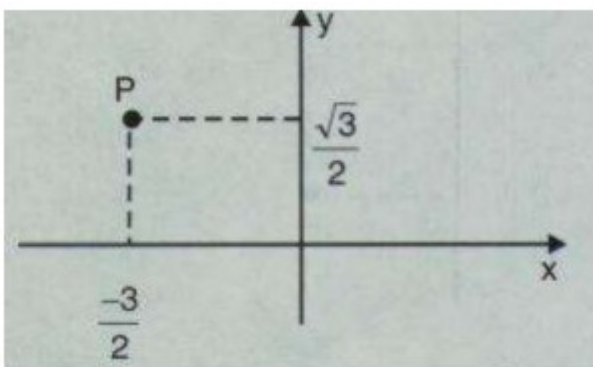
Como $a = 1$ e $b = -\sqrt{3}$, $P(1, -\sqrt{3})$ está no 4º quadrante, então devemos reduzir o ângulo de 60° para o 4º quadrante.

$\emptyset = 360^\circ - 60^\circ$

Portanto, $\emptyset = 300^\circ$ ou $\frac{5\pi}{3}$.



4) Na figura abaixo, o ponto P é a imagem de um número complexo z , representado no plano de Gauss.



Nessas condições, determine:

- a) O módulo de z .
- b) O argumento de z .
- c) z na forma algébrica ou retangular.
- d) z na forma trigonométrica z na forma algébrica ou retangular.
- e) z na forma polar
- f) z na forma exponencial

Resolução

$$Z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$a = -\frac{3}{2} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{a) Módulo: } \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{9+3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

Resposta: Módulo $\rho = \sqrt{3}$

$$\text{b) O argumento de } Z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{O argumento é } \emptyset = \text{Arctg } \frac{b}{a} = \text{Arctg } \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot -\frac{2}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\emptyset = \text{Arctg } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Portanto, } \emptyset = 30^\circ$$

Observando o gráfico, verificamos que $\emptyset$ está no 2º quadrante, logo devemos reduzir o ângulo de 60° para o 2º quadrante.

$$\emptyset = 180^\circ - 30^\circ$$

$$\emptyset = 150^\circ$$

$$\text{Portanto, } \emptyset = 150^\circ \text{ ou } \frac{5\pi}{6}.$$

Resposta: O argumento 150° ou $\frac{5\pi}{6}$

c) z na forma algébrica ou retangular.

$$Z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Resolução (d)

z na forma algébrica ou retangular.

$$Z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$Z = \rho(\cos \emptyset + i \sen \emptyset)$$

$$\text{Resposta} = \sqrt{3}(\cos 150^\circ + i \sen 150^\circ)$$

Resolução (e)

Z na forma polar

$$Z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Reposta: } Z = \sqrt{3} / \underline{150^\circ}$$

Resolução (f)

Z na forma exponencial

$$Z = \rho \cdot e^{i\theta}$$

$$\text{Resposta: } \sqrt{3} \cdot e^{i150^\circ}$$

5) Efetue a potência Z^5 sabendo que $A = 2(\cos 60^\circ + i \sen 60^\circ)$

Resolução

$$Z^5 = 2^5 (\cos (5 \cdot 60^\circ) + i \sen (5 \cdot 60^\circ))$$

$$\text{Resposta} = 32(\cos 300^\circ + i \sen 300^\circ)$$

6) Escrever os números complexos na forma algébrica ou retangular:

a) $Z = -8(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6})$

b) $Z = 3(\cos + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})$

c) $Z = 6 \angle 135^\circ$

Resolução (a)

$$Z = -8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$$

$$Z = -8(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2})$$

$$Z = -8 \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \cdot (-8)$$

$$Z = -4\sqrt{3} - 4i$$

Resposta $Z = -4\sqrt{3} - 4i$

Resolução (b)

$$Z = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})$$

$$Z = 3(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$$

$$Z = 3(0 + i \cdot 1)$$

$$Z = 0 + 3i$$

Resposta: $z = 3i$

Resolução (C)

$$Z = 6 \angle 135^\circ$$

$$R\hat{o} = \rho = 6$$

$$\emptyset = 135^\circ$$

$$Z = 6(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

Como 135° está no segundo quadrante, $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como 135° está no segundo quadrante, $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Desta forma, temos $Z = 6(-\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

$$\text{Assim temos } Z = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Então, $Z = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6i \frac{\sqrt{2}}{2}$. Simplificando temos:

$$\text{Resposta } Z = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$

7) Considerando os números complexos abaixo, determine o que se pede:

a) $Z_1 = 4(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)$

b) $Z_2 = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$

c) $Z_3 = \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ$

d) $Z_4 = 8 \angle 135^\circ$

e) $Z_5 = 6 \angle 15^\circ$

f) $Z_6 = 3 \angle 45^\circ$

a) $Z_1 \cdot Z_2 = ?$

Resolução

$$Z_1 \cdot Z_2 = 4 \cdot 2 (\cos (10^\circ + 20^\circ) + i \sin (10^\circ + 20^\circ)) = 8 (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

Resposta: $Z_1 \cdot Z_2 = 8 (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

b) $Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = ?$

Resolução

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = (4(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)) \cdot (2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)) \cdot (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = 4 \cdot 2 (\cos(10^\circ + 20^\circ + 15^\circ) + i \sin (10^\circ + 20^\circ + 15^\circ)) = 8 \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$$

Resposta: $Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = 8 \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$

c) $Z_1 \cdot Z_5 = ?$

Resolução

$$Z_5 = 6 \angle 15^\circ = 6 (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$$

$$Z_5 = 6(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$$

$$Z_1 = 4(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)$$

$$Z_1 \cdot Z_5 = 4(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ) \cdot 6(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) = 24(\cos (10^\circ + 15^\circ) + i \sin (10^\circ + 15^\circ))$$

Resposta $Z_1 \cdot Z_5 = 24(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$

$$d) \frac{Z_4}{Z_5} = ?$$

Resolução

$$Z_4 = 8 \angle 135^\circ \quad Z_5 = 6 \angle 15^\circ$$

Representando na forma trigonométrica vem:

$$Z_4 = 8(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$Z_5 = 6(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$$

$$\frac{Z_4}{Z_5} = \frac{8(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)}{6(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)} = \frac{8}{6}(\cos(135^\circ - 15^\circ) + i \sin(135^\circ - 15^\circ))$$

$$\text{Resposta: } \frac{Z_4}{Z_5} = \frac{4}{3}(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

$$e) \frac{Z_5}{Z_6} = ?$$

$$Z_5 = 6 \angle 15^\circ$$

$$Z_6 = 3 \angle 45^\circ$$

Representando na forma trigonométrica, temos:

$$Z_5 = 6(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$$

$$Z_6 = 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$\frac{Z_5}{Z_6} = \frac{6(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)}{3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)} = 2(\cos(15^\circ - 45^\circ) + i \sin(15^\circ - 45^\circ))$$

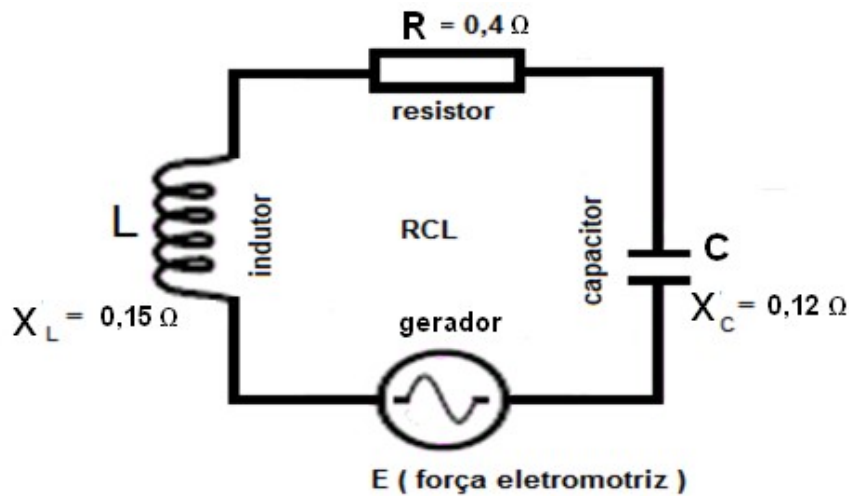
$$\text{Resposta: } \frac{Z_5}{Z_6} = 2[\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)]$$

Números complexos na eletricidade

1) Um circuito RLC contém um resistor, um indutor e um capacitor. A medida de resistência de um circuito RLC é chamada de **impedância** (Z) e é expressa por um número complexo. Num circuito RLC em série, a impedância equivalente ($Z_{eq.}$) em Ohm (Ω) na forma retangular é dada por:

$$Z_{eq.} = R + jX_L - jX_C$$

Ache $Z_{eq.}$ no circuito RLC, em série, abaixo:



Resolução

$$Z_{eq} = R + jX_L - jX_C$$

$$R = 0,4, \quad X_L = 0,15, \quad X_C = 0,12$$

$$Z_{eq} = 0,4 + 0,15j - 0,12j$$

$$Z_{eq} = 0,4 + 0,03j$$

$$\text{Resposta: } Z_{eq} = 0,4 + 0,03j$$

2) Para um circuito RLC, a primeira Lei a primeira Lei de Ohm (Ω) é dada por:

$E = Z_{eq.} \cdot i$, sendo E a força eletromotriz, i a corrente elétrica e $Z_{eq.}$ a impedância equivalente desse circuito.

Considerando um circuito RLC onde $Z_{eq} = 2 - j6$, determine na forma retangular:

a) A força eletromotriz E , em volts, quando $I = 40 + j100$;

b) a corrente I , em ampères, quando $E = -4 + j2$

Lembrete: Se $E = Z \cdot i$, então $i = \frac{E}{Z}$.

Resolução

a) Quanto vale a força eletromotriz E, quando $I = 40 + j100$?

$$Z_{eq} = 2 - j6, \text{ para } i = 40 + j100;$$

$$\text{Vem: } E = Z_{eq} \cdot i = (2 - j6) \cdot (40 + j100) = (2 \cdot 40) + (2 \cdot j100) - (j6 \cdot 40) - (j6 \cdot j100)$$

$$E = 80 + j200 - 240j - 600j^2$$

$$E = 80 - j40 - 600(-1)$$

$$E = 80 - j40 + 600$$

$$\text{Resposta: } E = 680 - j40 \text{ v}$$

Resolução b)

Quanto mede a corrente i quando $E = -4 + j2$

Resolução

$$Z_{eq} = 2 - j6$$

$$E = Z_{eq} \cdot i \text{ então } i = \frac{E}{Z_{eq}}$$

$$\text{Portanto } i = \frac{-4 + j2}{2 - j6} = \frac{(-4 + j2)(2 + j6)}{(2 - j6)(2 + j6)} = \frac{-8 - j24 + j4 + j^2 12}{4 - j^2 36} = \frac{-8 - j20 - 12}{4 - (-1) \cdot 36} = \frac{-20 - j}{40}$$

$$\frac{-20}{40} - \frac{-j20}{40} = -\frac{1}{2} - \frac{j}{2}$$

$$\text{Resposta: } i = -\frac{1}{2} - \frac{j}{2}$$

3) No circuito RLC de força eletromotriz $E = 4 \angle 15^\circ$ e impedância $Z = 2 + j2$; determine a corrente elétrica na forma polar.

$$E = Z \cdot i, \text{ Logo, } i = \frac{E}{Z}$$

$$Z = 2 + j2 \text{ a} = 2 \text{ e b} = 2$$

$$\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\rho = 2\sqrt{2}$$

Calculando θ usando tangente:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{2} = 1$$

$$\theta = \operatorname{Arctg} 1.$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$Z = 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ)$$

$$E = 4(\cos 15^\circ + j\sin 15^\circ)$$

$$i = \frac{4(\cos 15^\circ + j\sin 15^\circ)}{2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ)} = \frac{2}{\sqrt{2}}(\cos(15^\circ - 45^\circ) + j\sin(15^\circ - 45^\circ)) =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}[\cos(-30^\circ) + j\sin(-30^\circ)]$$

$$i = \frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(-30^\circ) + \sin(-30^\circ)] \quad \text{ou} \quad i = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 300^\circ + \sin 300^\circ)$$

$$i = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -30^\circ$$

4) No circuito RLC de impedância $Z = 8 \angle 30^\circ$ e corrente elétrica $i = 5 \angle 15^\circ$; determine a força eletromotriz na forma algébrica.

Resolução:

$$Z = 8 \angle 30^\circ$$

$$Z = 8(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ)$$

$$i = 5 \angle 15^\circ$$

$$i = 5(\cos 15^\circ + j\sin 15^\circ)$$

$$E = Z \cdot i = 8(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ) \cdot 5(\cos 15^\circ + j\sin 15^\circ) = 8 \cdot 5(\cos(30^\circ + 15^\circ) + j\sin(30^\circ + 15^\circ))$$

$$E = 40(\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ)$$

$$E = 40\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$E = 20\sqrt{2} + j 20\sqrt{2}$$

Resposta: $E = 20\sqrt{2} + j 20\sqrt{2}$