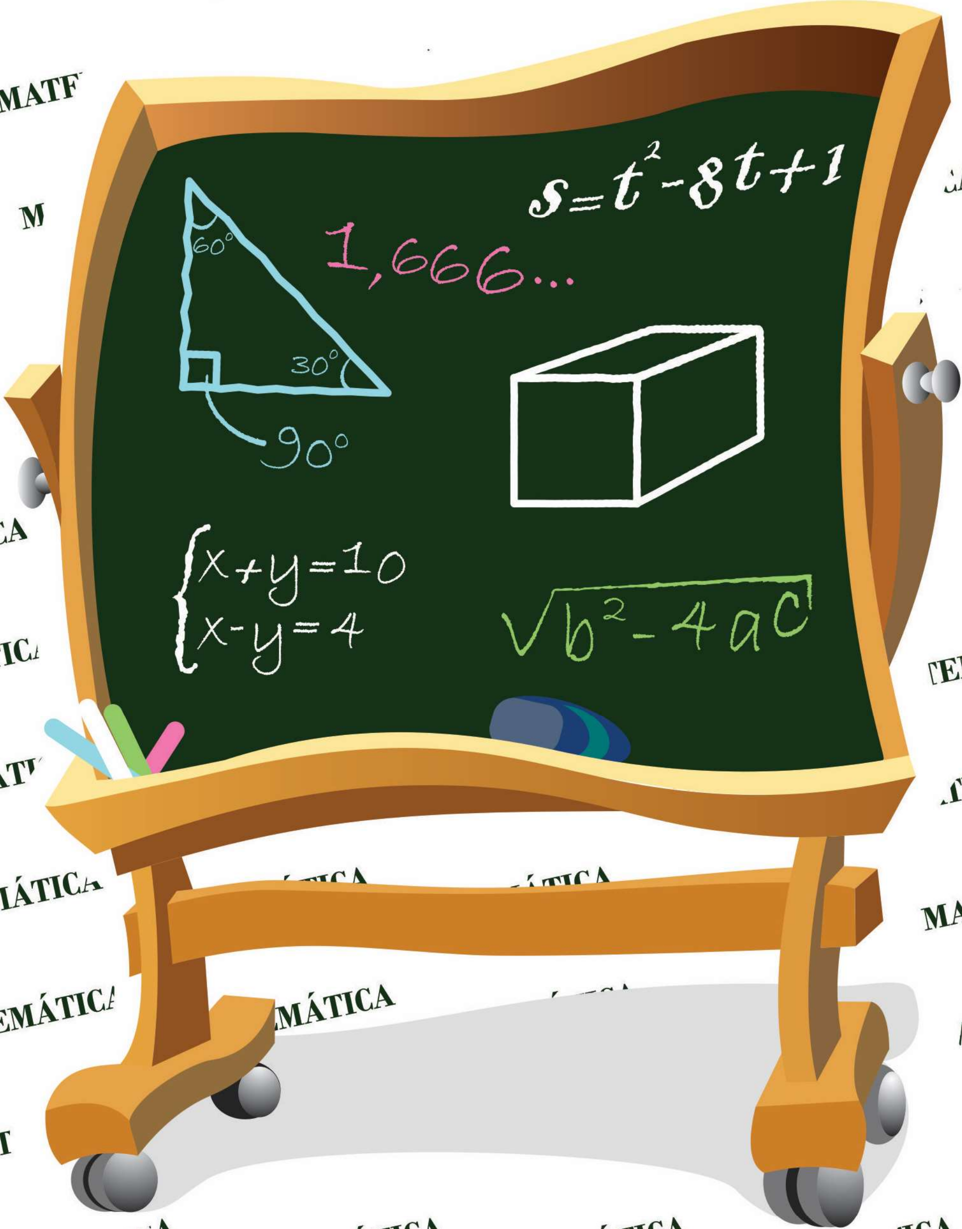
MATEMÁTICA



FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

ETEVM
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

GOVERNO DO Rio de Janeiro

NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA GEOMÉTRICA

COORDENAÇÃO

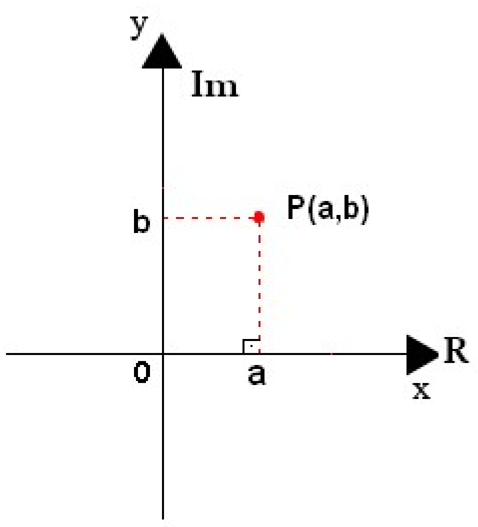
SERGIO LOPES RODRIGUES

Números Complexos na forma geométrica

Representação geométrica dos números complexos

Plano de Argand Gauss

O plano cartesiano é chamado plano complexo ou plano de Argand Gauss quando o eixo das abscissas é chamado eixo dos números reais e o eixo das ordenadas é chamado eixo dos números imaginários.



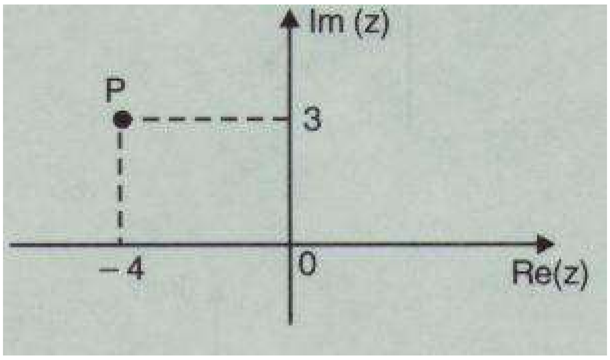
$XOY \rightarrow Plano\ de\ Argand\ Gauss$

$OX \rightarrow eixo\ dos\ números\ reais$

$OY \rightarrow eixo\ dos\ números\ imaginários$

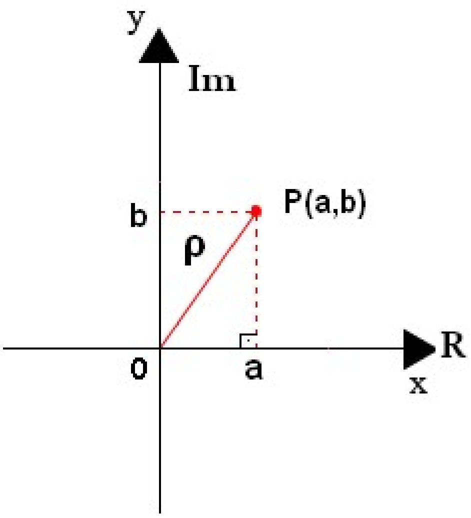
$P \rightarrow afixo\ ou\ imagem\ do\ número\ complexo\ Z = a + bi$

Veja a representação geométrica do complexo z = - 4 + 3i.



Módulo de um número complexo

Considerando o número complexo $Z = a + bi$.



A distância $\overline{OP}$ chama-se **módulo** de Z e indicamos por $|Z|$ ou ρ.

Aplicando o teorema de Pitágoras

$\rho^2 = a^2 + b^2$

$$\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$$ Módulo de Z

$|Z| = \rho = d_{op} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exercício resolvido

Calcular o módulo do número complexo $Z = 4 - 3i$.

$|Z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2}$

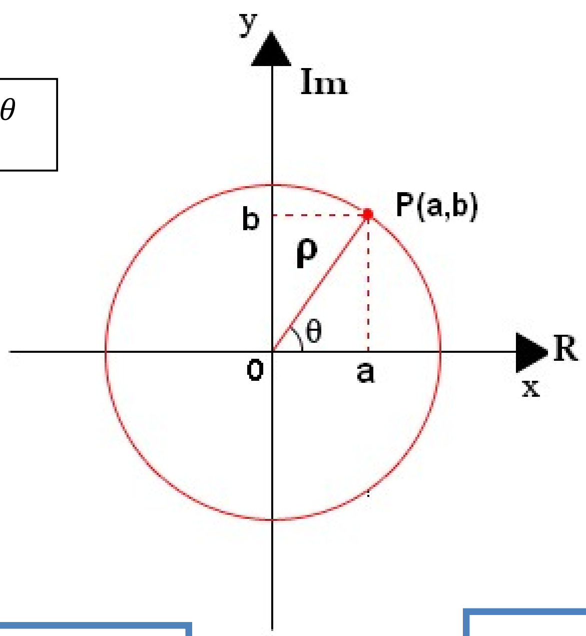
$|Z| = \sqrt{5}$

$|Z| = 5$

Argumento de um número complexo

Chama-se argumento do número complexo Z, a medida do ângulo θ, formado por $\overrightarrow{OP}$ com o eixo $\overleftrightarrow{OX}$, medido no sentido anti-horário e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\boxed{\arg(Z) = \theta}$$



$$\boxed{cos\theta = \frac{a}{\rho} \quad e\ sen\theta = \frac{b}{\rho}}$$

$$\boxed{tg\theta = \frac{b}{a}}$$

Exercício resolvido

Determinar o módulo, o argumento e fazer a representação geométrica do número complexo $Z = \sqrt{3} + i$.

Solução:

- Cálculo do módulo

$|Z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}$

$|Z| = \sqrt{3+1}$

$|Z| = \ \rho = 2$

- Cálculo do argumento

$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$sen\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{1}{2}$

θ é o arco cujo $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\theta = \frac{1}{2}$.

Logo $\theta = \frac{\pi}{6} = 30°$

Podemos também calcular o argumento usando a tangente do ângulo:

$tg\theta = \frac{b}{a}$

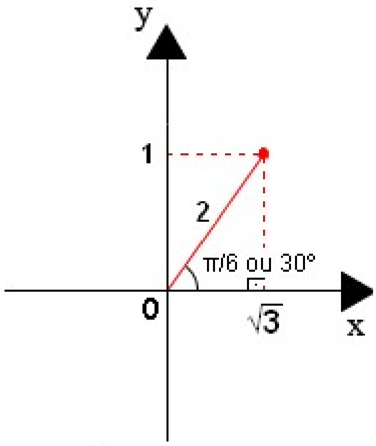
$\mathrm{tg}\ \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ => $\mathrm{tg}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\mathrm{tg}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

θ é o arco cuja tangente é $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou θ = arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$

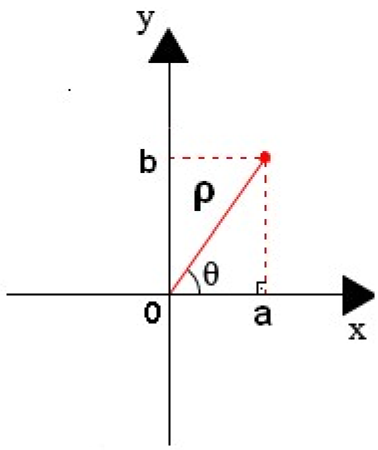
Neste caso, θ pode ser $30°$ ou $210°$. Como o **a** é positivo e **b** é positivo, o ângulo **θ** está no 1º quadrante, então $\theta = 30°\ ou\ \frac{\pi}{6}$.

- Representação gráfica



Forma trigonométrica de um número complexo

Considerando $Z = a + bi$, representado pelo ponto $P(a, b)$, temos:



$cos\theta = \frac{a}{\rho} \quad \rightarrow \quad a = \rho . cos\theta$

$sen\theta = \frac{b}{\rho} \quad \rightarrow \quad b = \rho . sen\theta$

Substituindo em $Z = a + bi$, tem-se:

$Z = \rho cos\theta + \rho sen\theta i$

Colocando ρ em evidência, temos a Fórmula trigonométrica do número complexo Z.

$\boxed{Z = \rho(cos\theta + isen\theta)}$ ou $\boxed{Z = \rho(cos\theta + jsen\theta)}$

Outras formas de números complexos

Na eletricidade usamos outras formas de números complexos, veja:

Forma Polar

O número complexo na forma polar é bastante utilizado na análise de circuitos e é representado por :

$$\boxed{|Z|\angle\theta}$$

Forma exponencial:

A fórmula de Euller, $e^{j\theta} = cos\theta + jsen\theta,$ possibilita outra forma de número complexos, denominada forma exponencial.

$$Z = \rho(cos\theta + jsen\theta) = \rho e^{j\theta}$$

$$\boxed{z = \rho e^{j\theta}}$$

Exercício resolvido

1) Escreva o número complexo $Z = 1 + \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica, polar e exponencial.

Solução:

- Cálculo do módulo
  $\rho = \sqrt{1+3} = 2$

- Cálculo do argumento
  $cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{2}$

  $sen\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

  $\theta = \frac{\pi}{3}$ou 60º

  Calculando θ usando tangente:

  $tg\theta = \frac{b}{a}$

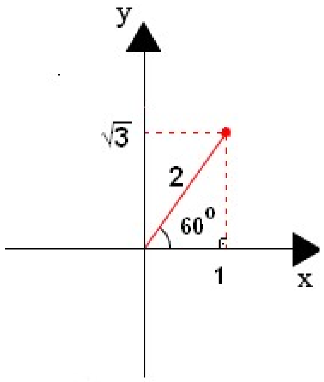
  $\text{tg}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$

  θ é o arco cuja tangente é $\sqrt{3}$ ou θ = arc tg $\sqrt{3}$

  logo, θ = $\frac{\pi}{3} = 60°$

  Neste caso, θ pode ser $60°$ ou $240°$. Como o **a** é positivo e **b** é positivo, o ângulo **θ** está no 1º quadrante, então $\theta = 60°\ ou\ \frac{\pi}{3}$.

- Representação gráfica



- Forma trigonométrica

$Z = \rho(cos\theta + jsen\theta)$

$Z = 2(cos\frac{\pi}{3} + jsen\frac{\pi}{3})$ ou $Z = 2(cos60^o + jsen60^o)$

- Forma polar

$Z = 2\angle 60^o$

- Forma exponencial

$z = 2e^{j60^o}$

2) Escreva o número complexo $Z = 4\angle 120^o$ na forma trigonométrica e retangular.

- Forma trigonométrica

$Z = \rho(cos\theta + jsen\theta)$

$$Z = 4(cos120^o + jsen120^o)\ ou\ Z = 4(cos\frac{2\pi}{3} + jsen\frac{2\pi}{3})$$

- Forma retangular

$Z = 4(cos120^o + jsen120^o)$

$Z = 4(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$Z = 4(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$Z = \frac{4}{2}(-1 + j\sqrt{3})$$

$$Z = 2(-1 + j\sqrt{3})$$

$$Z = -2 + j2\sqrt{3})$$

Operações com números complexos na forma trigonométrica

Multiplicação na forma trigonométrica

Considerando dois números complexos:

$Z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e

$Z_2 = \rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$

Efetuando $Z_1.Z_2$

$$Z_1.Z_2 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1).\rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$$

$$Z_1.Z_2 = \rho_1.\rho_2(cos\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1.isen\theta_2 + isen\theta_1.cos\theta_2 + i^2 sen\theta_1.sen\theta_2)$$

$$Z_1.Z_2 = \rho_1.\rho_2(cos\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2) + i(cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1 cos\theta_2)$$

Pela propriedade da trigonometria temos

$$\cos(\alpha + \beta) = cos\alpha.cos\beta - sen\alpha.sen\beta$$

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha.cos\beta + sen\beta.cos\alpha$$

tem-se que:

$$\boxed{Z_1.Z_2 = \rho_1.\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]}$$

Concluí-se que, para multiplicar dois números complexos na forma trigonométrica, **multiplicamos os módulos e somamos os seus argumentos.**

Exercício resolvido

Multiplicar os números complexos:

a) $Z_1 = 7(cos80° + isen80°)$
$Z_2 = 4(cos50° + isen50°)$

Solução:

$Z_1.Z_2 = \rho_1.\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$

$Z_1.Z_2 = 28(cos130° + isen130°)$

b) $Z_1 = 2(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2})$
$Z_2 = 3(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3})$

Solução:

$$Z_1.Z_2 = 2\,.\,3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + isen(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})\right]$$

$$Z_1.Z_2 = 6(cos\frac{5\pi}{6} + isen\frac{5\pi}{6})$$

Divisão na forma trigonométrica

Considerando dois números complexos:

$Z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$

$Z_2 = \rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$

Efetuando $\frac{Z_1}{Z_2}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)}{\rho_2\,(cos\theta_2 + isen\theta_2)}.\frac{\rho_2(cos\theta_2 - isen\theta_2)}{\rho_2(cos\theta_2 - isen\theta_2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1.\rho_2(cos\theta_1.cos\theta_2 - icos\theta_1.sen\theta_2 + isen\theta_1.cos\theta_2 - i^2sen\theta_1.sen\theta_2)}{\rho_2^2(cos^2\theta_2 - i^2sen^2\theta_2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1[(cos\theta_1.cos\theta_2 + sen\theta_1.sen\theta_2) + i(sen\theta_1.cos\theta_2 - cos\theta_1.sen\theta_2)]}{\rho_2(cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2)}$$

Pela propriedade da trigonometria, temos:

$\cos(\alpha - \beta) = cos\alpha . cos\beta + sen\alpha . cos\beta$

$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha . cos\beta - sen\beta . cos\alpha$, tem-se:

$$\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)]}$$

Concluí-se que, para dividir dois números complexos na forma trigonométrica, **dividimos os módulos e subtraímos os seus argumentos.**

Exercício resolvido

Dividir os números complexos:

$Z_1 = 15(cos40° + isen40°)$

$Z_2 = 3(cos15° + isen15°)$

Solução:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{15}{3}[\cos(40° - 15°) + isen(40° - 15°)]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = 5(cos25° + isen25°)$$

Potenciação (Fórmula de Moivre)

Sendo $Z = \rho[cos\theta + isen\theta]$ e $n \in \mathbb{N}^*$

$Z^n = Z.Z.Z \dots Z = \rho.\rho. \dots \rho[\cos(\theta + \theta + \cdots + \theta) + isen(\theta + \theta + \cdots + \theta)]$

$$\boxed{Z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)]}$$

Concluí-se que, para elevar um número complexo à potência natural n, elevamos seu módulo ρ à potência n e multiplicamos seu argumento θ por n.

Exercício resolvido

Calcular Z^6 para o número complexo $Z = 2(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6})$

Solução:

Aplicando a fórmula de Moivre, temos:

$$Z^6 = 2^6 \left[\cos\left(6.\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(6.\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$Z^6 = 64[cos\pi + isen\pi]$$

$$Z^6 = 64[-1 + i.0]$$

$$Z^6 = -64$$

Radiciação

Chama-se raiz enézima do número complexo $Z = \rho(cos\theta + isen\theta)$ a todo número complexo $w = r(cos\varphi + isen\varphi)$ tal que:

$$w^n = Z$$

$w = \sqrt[n]{Z}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

$$[r(cos\varphi + isen\varphi)]^n = \rho(cos\theta + isen\theta)$$

$$r^n = [\cos(n\varphi) + isen(n\varphi)] = \rho(cos\theta + isen\theta)$$

Módulo

$$r^{\boldsymbol{n}} = \rho \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[n]{\rho}$$

Argumento

$$\begin{cases}\cos(n\varphi) = cos\theta \\ sen(n\varphi) = sen\theta\end{cases} n\varphi = \theta + 2k\pi \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Portanto,

$$\boxed{\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]}$$

Para $k = 0,1,2,3, \dots, n-1$ valores.

Exercício resolvido

Determinar as raízes cúbicas de $Z = 8(cos0 + isen0)$

Solução:

$$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{8}\left(cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + isen\frac{0 + 2k\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{Z} = 2\left(cos\frac{2k\pi}{3} + isen\frac{2k\pi}{3}\right)$$

O número **k** deve variar de 0 a 2

$$k = 0 \rightarrow \quad 2(cos0 + isen0) = 2(1 + i.0) = 2$$

$$k = 1 \rightarrow \quad 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \quad \rightarrow \quad 2\left(cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$

Em eletricidade usa-se bastante multiplicação e divisão na forma polar.

Veja:

$$\mathbf{Z}_1\,\mathbf{Z}_2 = (\rho_1 \angle \theta_1)(\rho_2 \angle \theta_2) = \rho_1\,\rho_2 \angle \theta_1 + \theta_2$$

Se $\mathbf{Z}_1 = 2\angle 30^\circ$ e $\mathbf{Z}_2 = 5\angle -45^\circ$, então $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = (2\angle 30^\circ)\,(5\angle -45^\circ = 10\angle -15^\circ$.

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{\rho_1 \angle \theta_1}{\rho_2 \angle \theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \angle \theta_1 - \theta_2$$

Se $\mathbf{z}_1 = 8\angle -30$ e $\mathbf{z}_2 = 2\angle -60$, então $\dfrac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \dfrac{8\angle -30^\circ}{2\angle -60^\circ} = 4\angle 30^\circ$.

Exercícios

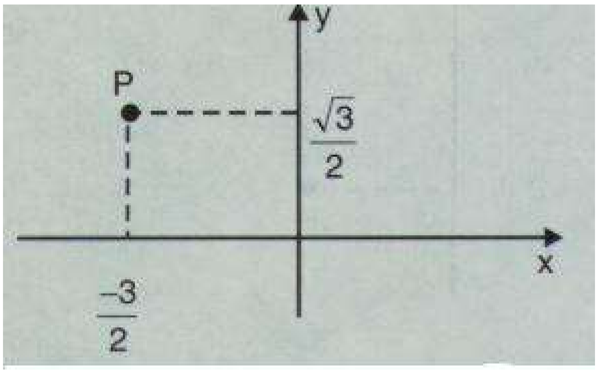
1) Determine o módulo dos números complexos:
   a) $Z = 4 - i$
   b) $Z = -3 - j4$
   c) $Z = -5i$

2) Determine o módulo, o argumento e a representação geométrica do número complexo $Z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

3) Represente graficamente os números complexos abaixo:

a) $Z = 2i$
b) $Z = -5$
c) $Z = 1 + i$
d) $Z = 1 - j\sqrt{3}$
e) $Z = -1 - j$

4) Na figura abaixo, o ponto P é a imagem de um número complexo z, representado no plano de Gauss.



Nessas condições, determine:

a) O módulo de z.

b) O argumento de z.

c) z na forma algébrica ou retangular.

d) z na forma trigonométrica

e) z na forma polar

f) z na forma exponencial

5) Efetue a potência Z^5 sabendo que $Z = 2(cos60° + isen60°)$.

6) Escrever os números complexos na forma algébrica ou retangular:

a) $Z = -8(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6})$

b) $Z = 3\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$

c) $Z = 6 \angle 135^{0}$

7) Considerando os números complexos abaixo, determine o que se pede:

$$Z_1 = 4(cos10° + isen10°)$$
$$Z_2 = 2(cos20° + isen20°)$$
$$Z_3 = cos15° + isen15°$$

$$Z_4 = 8\angle 135^{0}$$
$$Z_5 = 6\angle 15^{0}$$
$$Z_6 = 3\angle 45^{0}$$

a) $Z_1.Z_3$

$b)$ $Z_1.Z_2.Z_3$

c) $Z_4.Z_5$

d) $\frac{Z_4}{Z_5}$

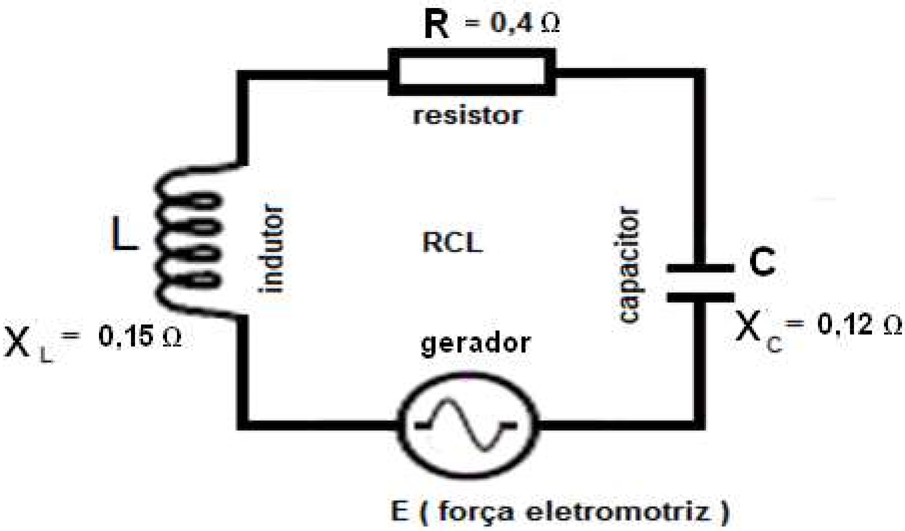
b) $\frac{Z_5}{Z_6}$

Números complexos na eletricidade

1) Um circuito RLC contém um resistor, um indutor e um capacitor. A medida de resistência de um circuito RLC é chamada de **impedância** (Z) e é expressa por um número complexo.Num circuito RLC em série, a impedância equivalente ($Z_{eq.}$) em Ohm (Ω) na forma retangular é dada por:

$Z_{eq.} = R + jX_L - jX_C$

Ache $Z_{eq.}$ no circuito RLC, em série, abaixo:



2) Para um circuito RLC, a primeira Lei a primeira Lei de Ohm (Ω) é dada por:

$E = Z_{eq.} \cdot i$, sendo **E** a força eletromotriz, **i** a corrente elétrica e $Z_{eq.}$ a impedância equivalente desse circuito.

Considerando um circuito RLC onde $Z_{eq.} = 2 - j6$, determine na forma retangular:

a) A força eletromotriz **E**, em volts, quando **I** = 40 + j100;

b) a corrente I, em ampères, quando E = – 4.+ j2

Lembrete: Se **E = Z . i**, então **i** $= \frac{E}{Z}$.

3) No circuito RLC de força eletromotriz $E = 4 \angle 15^0$ e impedância Z= 2 + j2; determine a corrente elétrica na forma polar.

4)No circuito RLC de impedância $Z = 8 \angle 30^0$ e corrente elétrica $i = 5 \angle 15^0$; determine a força eletromotriz na forma algébrica.

Bibliografia

BARROSO,JulianeMatsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

FACHINI, Walter. Matemática; volume único. São Paulo, Saraiva,1996.

GIOVANNI, José Rui; BONJORNO, José Roberto. Matemática. São Paulo, FTD,1992.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva,2010.

MARCONDES, Carlos Alberto ET AL. Matemática. São Paulo, Ática, 2000.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática antes e depois. São Paulo, Saraiva, 2006.

MUNOHZ, Ainda, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Sites:

http://www.somatematica.com.br

Escola 24 horas - http://www.escola 24h.com.br

http://www.matematica.com.br