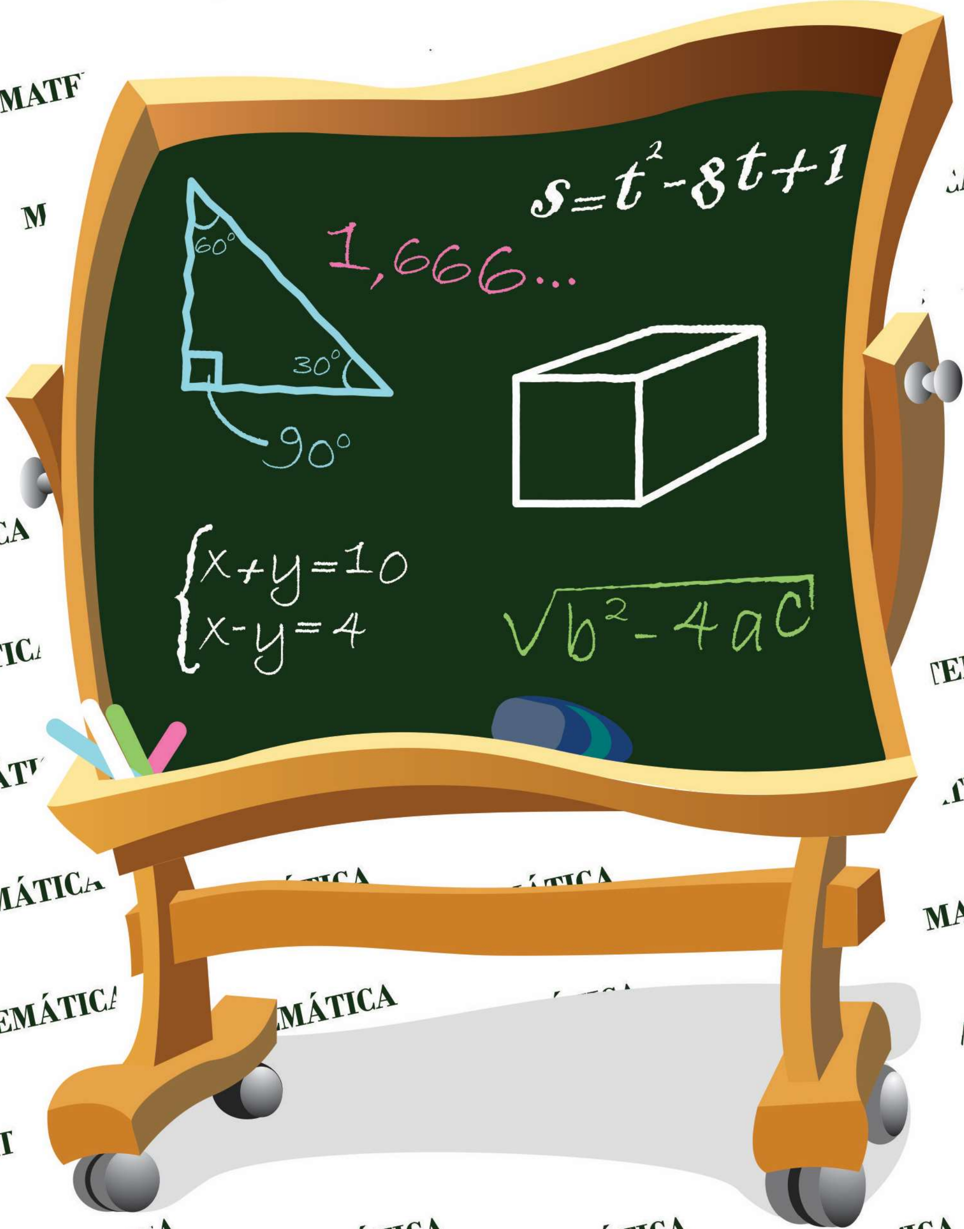
MATEMÁTICA



FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

ETEVM
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

GOVERNO DO Rio de Janeiro

NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA ALGÉBRICA OU RETÂNGULAR

COORDENAÇÃO

SERGIO LOPES RODRIGUES

Números Complexos

Os números complexos surgiram no século XVI em decorrência da necessidade de se resolver equações do 3º grau, em que apareceram raízes de números negativos.

Em 1545 o matemático Girolamo Cardano usando seus próprios métodos resolveu a equação $x^3 - 15x = 4$, chegando ao resultado:

x = $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ + $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$

Cardano já sabia que x = 4 era solução da equação, pois $4^3 - 15 \cdot 4 = 4$, mas não conseguia entender como um número real poderia se originar de uma expressão que continha raízes de números negativos se estas não existiam.

Mais tarde o matemático Raphael Bombelli prosseguiu com a solução de Cardano usando um número imaginário representado por $\sqrt{\mathbf{-1}}$, ficando $\sqrt{-121}$,= $\sqrt{121.(-1)} = \mathbf{11}\sqrt{\mathbf{-1}}$. No século XVIII, Leonard Euler usou o símbolo i para representar $\sqrt{-1}$, Assim $11\sqrt{-1}$ passou ser expresso por **11i**. Para não acarretar confusão com a intensidade da corrente elétrica, em eletricidade usa-se **j** ao invés de **i**.

Finalmente Carl Friederich Gauss associou números complexos a pares ordenados de números reais criando assim, sua representação geométrica.

Hoje em dia, as aplicações dos números complexos adquiriram grandes importância no campo da eletricidade, na aerodinâmica, no estudo da interferência em linhas de transmissão de energia e telefonia, etc.

Utilizando as teorias citadas acima, agora podemos resolver equações do 2º grau onde aparecem raízes de números negativos. Veja os exemplos:

Resolva as equações no conjunto dos números complexos:

a) $x^2 + 16 = 0$
$x^2 = -16$
$x = \pm\sqrt{-16}$
$x = \pm\sqrt{16}.\sqrt{-1}$
$x = \pm 4i$

b) $3x^2 + 75 = 0$

$3x^2 = -75$

$x^2 = -\frac{75}{3}$

$x^2 = -25$

$x = \pm\sqrt{-25}$

$x = \pm 5i$

c) $x^2 - 4x + 5 = 0$

Usando a fórmula de Báskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, onde\ \Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$\Delta = (-4)^2 - 4.1.5$

$\Delta = 16 - 20$

$\Delta = \ -4$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2\ .\ 1}$

$x = \frac{4 \pm 2i}{2}$

$x = \frac{4}{2} \pm \frac{2i}{2}$

$x = 2 \pm i$

Potência de i

Calculando as potências de i^n, onde n é um número natural, tem-se:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2. i = -1. i = -i$

$i^4 = i^2. i^2 = -1. (-1) = 1$

$i^5 = i^4. i = 1. i = i$

$i^6 = i^5 . i = i . i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6 . i = -1 . i = -i$

$i^8 = i^7 . i = -i . i = -i^2 = -(-1) = 1$

Observe que as potências sucessivas de i se repetem periodicamente de acordo com a sequência $1, i, -1, -i$.

Para calcularmos o resultado de i^n, com $n \in \mathbb{N}\ e\ n \geq 4$, dividimos n por 4 obtendo o quociente q e o resto r.

$i^n = i^r$ onde r é o resto da divisão de n por 4.

Demonstração

Sabendo que $n = 4q + r$, temos:

$$i^n = i^{(4q+r)} \quad \therefore \quad i^{4q} . i^r \quad \therefore \quad (i^4)^q . i^r \quad \therefore \quad (1)^q = i^r \quad \therefore \quad i^r$$

$$i^n = i^r$$

Exercício resolvido

Calcule:

a) i^{63}

Solução:

Fazendo a divisão de 63 por 4, encontramos resto 3, então:

$$i^{63} = i^3$$
$$i^{63} = -i$$

b) i^{72}

Fazendo a divisão de 72 por 4, encontramos resto 0, então:

$$i^{72} = i^0$$
$$i^{72} = 1$$

Observação:

Não é definida para o campo dos números complexos a relação de ordem, isto é, não existe um número complexo maior ou menor do que o outro.

Conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$)

Forma algébrica ou retangular

Todo número complexo pode ser escrito na forma $Z = a + bi$, com $a, b \in \mathcal{R}$, chamada forma algébrica.

Em eletricidade usa-se: $Z = a + jb$,

a $\longrightarrow$ número real chamado parte real de Z: $Re(Z)$

b $\longrightarrow$ número real chamado parte imaginária de Z : $Im(Z)$

$\mathbb{C} = \{Z = a + bi / a\,, b \in \mathcal{R}\ e\ i = \sqrt{-1}\}$ conjunto dos números complexos.

$$z = a + bi \longrightarrow \begin{cases} a = Re(Z) \\ b = Im(Z) \end{cases}$$

Exemplos

a) $Z = 3 + 5i \longrightarrow Re(Z) = 3\ e\ Im(z) = 5$

b) $Z = 4 - j6 \longrightarrow Re(Z) = 4\ e\ Im(z) = -6$

c) $Z = -2i \longrightarrow Re(Z) = 0\ e\ Im(Z) = -2$

d) $Z = -\frac{2}{3} \longrightarrow Re(Z) = -\frac{2}{3}\ e\ Im(Z) = 0$

Observação

1- Um número é **real** quando a parte imaginária do número complexo é nula.
2- Um número é **imaginário puro** quando a parte real do número complexo é nula.

$$Z = a + bi \longrightarrow \begin{cases} Z = a + 0i \rightarrow Z = a \text{ (é } um\ número\ real) \\ Z = 0 + bi \longrightarrow Z = bi \text{ (é } um\ número\ imaginário\ puro) \end{cases}$$

Exemplos

a) $Z = 2 + 7i$ é um número imaginário

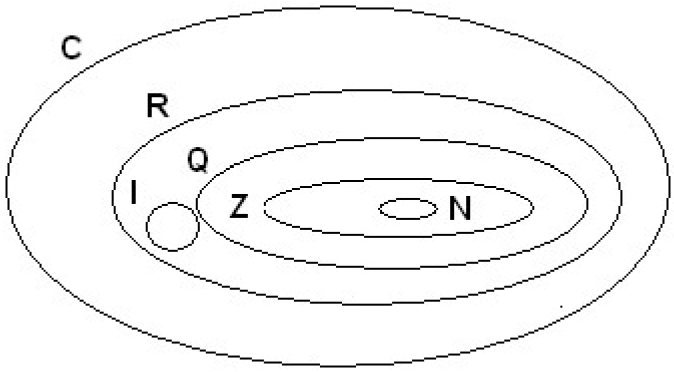
b) $Z = 5i$ é um número imaginário puro

c) $Z = 6$ é um número real

Observação

Se $a \in \mathcal{R} \Rightarrow a = a + 0i, a \in \mathbb{C}$

Todo número real é também um número complexo, ou seja, $\Re \subset \mathbb{C}$. Logo:



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

O conjunto dos números complexos é formado pelo conjunto dos números imaginários e reais.

Igualdade de números complexos

Dois números complexos são iguais quando suas partes reais e imaginárias são respectivamente iguais.

$Z_1 = a + bi \; e \; Z_2 = c + di$

$Z_1 = Z_2 \; \Leftrightarrow a = c \;\; e \;\; b = d$

Exercício resolvido

Determine os valores de **x** e **y** de modo que $Z_1 = Z_2$.

a) $Z_1 = (x + 3) + 2i$

$Z_2 = 5 + (y - 1)i$

Resolução:

$x + 3 = 5$ $\quad e \quad$ $y - 1 = 2$

$x = 2$ $\quad\quad$ $y = 3$

b) $Z_1 = (2x + y) + 6i$
$Z_2 = 5 + (x + 4y)i$

Resolução

Devemos encontrar a solução do sistema de equações abaixo

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$$

$x = 2 \; e \; y = 1$

Conjugado de um número complexo

Sendo $Z = a + bi$, define-se como conjugado de Z o complexo

$\bar{Z} = a - bi.$

$Z = a + bi \;\Rightarrow\; \bar{Z} = a - bi$

Exemplos

Determine o conjugado dos números complexos abaixo:

a) $Z = 4 + 5i$ o seu conjugado é $\bar{Z} = 4 - 5i$
b) $Z = -1 - j2$ o seu conjugado é $\bar{Z} = -1 + j2$
c) $Z = -6i$ o seu conjugado é $\bar{Z} = 6i$

Operações com números complexos

1) **Adição e subtração de números complexos**

Sendo $Z_1 = a + bi \; e \; Z_2 = c + di$ números complexos, definimos:
$Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)i$
$Z_1 - Z_2 = (a - c) + (b - d)i$

Exercício resolvido

Sendo $Z_1 = 4 + 5i$ e $Z_2 = 2 + 6i$, determine:

a) $Z_1 + Z_2 =$
$= (4 + 2) + (5 + 6)i$
$= 6 + 11i$

b) $Z_1 - Z_2 =$
$= (4 - 2) + (5 - 6)i$
$= 2 - i$

2) **Multiplicação de números complexos**

Sendo $Z_1 = a + bi \; e \; Z_2 = c + di$ números complexos, tem-se:

$Z_1 . Z_2 = (a + bi).(c + di)$

$Z_1 . Z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$

$Z_1.Z_2 = ac + adi + bci - bd$

$Z_1.Z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Exercício resolvido:

Sendo $Z_1 = 4 + 5i$ e $Z_2 = 2 + 6i$, calcule $Z_1.Z_2$:

Solução

$Z_1.Z_2 = (4 + 5i).(2 + 6i)$

Aplicando a propriedade distributiva temos

$Z_1.Z_2 = 8 + 24i + 10i + 30i^2$

$Z_1.Z_2 = 8 + 34i - 30$

$Z_1.Z_2 = -22 + 34i$

3) **Divisão de números complexos**

Dados dois números complexos Z_1 e Z_2, com $Z_2 \neq 0$, obtemos a divisão $\frac{Z_1}{Z_2}$ multiplicando ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador $\overline{Z_2}$.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z_2}.\frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_2}}$$

Exercício resolvido

Sendo $Z_1 = 5 + 3i$ e $Z_2 = 2 - i$, calcule $Z_1 \div Z_2$.

Solução:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(5 + 3i)}{(2 - i)}.\frac{(2 + i)}{(2 + i)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{10 + 5i + 6i + 3i^2}{4 + 2i - 2i + i^2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{7}{5} + \frac{11i}{5}$$

Exercícios

1) Determine as raízes imaginárias das equações abaixo:
   a) $x^2 + 4 = 0$
   b) $x^2 + 18 = 0$
   c) $x^2 - 2x + 2 = 0$
   d) $x^2 - 4x + 13 = 0$

2) Determine para cada número complexo a parte real e a parte imaginária:
   a) $Z = -4 - 9i$
   b) $Z = \sqrt{2}i$
   c) $Z = \frac{3}{2}$
   d) $Z = 5 - j\sqrt{3}$

3) Determine o valor de k de modo que o número complexo seja um imaginário puro.
   $Z = (x^2 - 4) + i$

4) Determine o valor de m de modo que o número complexo seja um número real.
   $Z = 2 + (3m - 7)i$

5) Determine os valores de x e y de modo que se tenha $Z_1 = Z_2$.
   $Z_1 = -4 + (3x + y)i$
   $Z_2 = (x + 2y) + 3i$

6) Determine o conjugado dos números complexos abaixo:
   a) $Z = 6 - \sqrt{2}$i
   b) $Z = 4i$
   c) Z = 7 + j6
   d) Z = - 4 - j12
   e)

7) Efetue:
   a) $(6 - 2i) + (-1 + 5i) - (7 - i)$=

b) $(3 - j).(-2 + j5) =$

c) $(4 - 3i)^2 =$

d) $\frac{2-5i}{1+2i} =$

e) $i^{123} + 4i^{35} =$

8) Considerando os números complexos abaixo, determine o que se pede:

$Z_1 = 3 - 4i$
$Z_2 = 2 + 5i$
$Z_3 = 3i$

a) $Z_1 + Z_2 + Z_3$

b) $Z_2 - Z_3$

c) $Z_3 . Z_1$

d) $\frac{Z_1}{Z_2}$

Bibliografia

BARROSO,Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

FACHINI, Walter. Matemática; volume único. São Paulo, Saraiva,1996.

GIOVANNI, José Rui; BONJORNO, José Roberto. Matemática. São Paulo, FTD,1992.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva,2010.

MARCONDES, Carlos Alberto ET AL. Matemática. São Paulo, Ática, 2000.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática antes e depois. São Paulo, Saraiva, 2006.

MUNOHZ, Ainda, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Sites:

http://www.somatematica.com.br

Escola 24 horas - http://www.escola 24h.com.br

http://www.matematica.com.br