FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Escola Técnica Estadual
Visconde de Mauá

Gabarito números complexos na forma algébrica

1) Determine as raízes imaginárias das equações abaixo:

a) $x^2 + 4 = 0$

b) $x^2 + 18 = 0$

c) $x^2 - 2x + 2 = 0$

d) $x^2 - 4x + 13 = 0$

a) $x^2 = -4$ portanto x = $\mp \sqrt{-4}$ = $\mp\sqrt{(-1)4}$.

Então, x = $\mp \sqrt{4}$. $\sqrt{(-1)}$ desta forma x = ∓ 2 . $\sqrt{(-1)}$.

Como a $\sqrt{(-1)} = i, vem\ x = \mp 2i$

Resposta x_1 = 2i e x_2 = -2i

a) x^2 = - 18 = 0 portanto x = $\mp \sqrt{-18}$ = $\mp \sqrt{(-1)18}$.

Então, x = $\mp\sqrt{(-1)2.9}$ desta forma temos x = $\mp \sqrt{9}$.$\sqrt{2}$.$\sqrt{(-1)}$

Portanto, x = $\mp 3\sqrt{2}\, i$

Resposta: x_1 = $3\sqrt{2}\, i$e x_2 = - $3\sqrt{2}\, i$

c) $x^2 - 2x + 2 = 0$

Resolução

I) x =$\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$II)$ $\Delta = b^2 - 4ac$

III) a = 1, b = -2 e c = 2

$Voltanto\ em\ II, temos\ \Delta = (-2)^2 - 4\,.\,1\,.\,2$, portanto $\Delta = 4 - 8$

$\Delta = \mathbf{-4}$

Voltando em I, temos x = $\frac{-(-2)\pm\sqrt{-4}}{2.1}$

x = $-\frac{2}{2} \mp \frac{\sqrt{-4}}{2}$ então x = $1 \mp \frac{\sqrt{-4}}{2}$

Para $\sqrt{-4}$, vimos no exercício **a** que $\sqrt{-4} = 2i, por\ tanto\ temos$:

X = 1 $\mp \frac{2i}{2}$, assim $x_1 = 1 + \frac{2i}{2}$ e $x_2 = 1 - \frac{2i}{2}$

Simplificando, temos: $x_1 = 1 + i$ e $x_2 = 1 - i$

Resposta $x_1 = 1 + i$ e $x_2 = 1 - i$

d) $x^2 - 4x + 13 = 0$

Resolução

I) x = =$\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

II) a = 1, b = -4 e c = 13

$III)\ \Delta = b^2 - 4ac$

$Voltantoem\ 2, temos\ \Delta = (-4)^2 - 4\,.\,1\,.13$, portato $\Delta = 16 - 52$

$\Delta = \mathbf{-36}$

Voltando em I, temos x =$\frac{-(-4)\pm\sqrt{-36}}{2.1}$

x = $\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2.}$, desta forma x = $\frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{-36}}{2}$

Então, x = $2 \mp \frac{\pm}{2}\,.\,\sqrt{-1}$, portanto x = $2 \mp \left(\frac{\sqrt{36}}{2}.\sqrt{-1}\right)$

x = $2 \mp \left(\frac{6}{2}.i\right)$

$portanto, temos$:

$x_1 = 2 + \frac{6}{2}.i$ e $x_2 = 2 - \frac{6}{2}.i$

Simplificando, vem $x_1 = 2 + 3i$ e $x_2 = 2 - 3i$

Resposta $x_1 = 2 + 3i$ e $x_2 = 2 - 3i$

2) Determine para cada número complexo a parte real e a parte imaginária:

a) $Z= -4 - 9i$

b) $Z = \sqrt{2}i$

c) $Z = \frac{3}{2}$

d) $Z = 5 - j\sqrt{3}$

P_r (parte real),P_i(parte imaginária)

Resolução

a) $P_r = -4$ e$P_i = -9$
b) $P_r = 0$ e$P_i = \sqrt{2}$
c) $P_r = \frac{3}{2}$ e $P_i = 0$
d) $P_r = 5$ e $P_i = -\sqrt{3}$

3) Determine o valor de k de modo que o número complexo seja um imaginário puro.

$Z = (k^2-4) +i$

Resolução

Para que Z seja um imaginário puro, é necessário que a parte rela seja igual a zero, e é isso que vamos fazer.

$K^2 -4 = 0$ então $K^2 = 4$

Portanto, k pode assumir os seguintes valores 2 e -2

Resposta k = 2 ou k = -2

4) Determine o valor de m de modo que o número complexo seja um número real.

$Z = 2 + (3m - 7)i$

Temos que igualar a expressão $3m - 7$ a zero,porque desta forma fica $Z = 2 + 0$,isto é $z = 2$.

Então vamos lá:

$3m - 7 = 0$, portanto $3m = 7$

Então $m = \frac{7}{3}$.

Resposta m = $\mathbf{\frac{7}{3}}$

5) Determine os valores de x e y de modo que se tenha $Z_1= Z_2$.

$Z_1 = -4 + (3x + y)i$ e $Z_2 = (x + 2y) +3i$

Resolução

Igualando Z_1 a Z_2, temos:

$-4 + (3x + y)i = (x + 2y)i$

Comparando as partes reais e os coeficientes dos imaginários temos:

$-4 = x + 2y$ e $3x + y = 3$

Formando um sistema com essas duas equações vem:

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por -2 temos:

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ -6x - 2y = -6 \end{cases}$$

Somando membro a membro vem:

$-5x = -10$, o que nos leva a crer que $5x = 10$ e $x = \frac{10}{5}$.

Portanto, x = 2

Substituindo o valor de x encontrado na equação $x + 2y = -4$, vem:

$2 + 2y = -4$, então $2y = -6$, o que nos leva a crer que y = = $\frac{-6}{2}$.

Y = - 3.

Resposta x = 2 e y = -3

6) Determine o conjugado dos números complexos abaixo:

a) $Z = 6 - \sqrt{2}i$

b) 4i

c) 7 + j6

d) -4 – j12

Resolução

Como para determinar o conjugado devemos só trocar o sinal entre a parte real e a imaginária, temos:

a) $Z = 6 + \sqrt{2}i$

b) -4i

c) 7 - j6

d) -4 + j12

7) Efetue:

a)(6 – 2i) + (-1 + 5i) – (7 – i) =

b) (3 – j).(-2 + j5) =

c) $(4 - 3i)^2$ =

d) $\frac{2-5i}{1-2i}$ =

e) $i^{123} + 4i^{35}$ =

Resolução

a) Parte real com parte real e imaginária com imaginária, vamos lá!

(6 – 2i) + (-1 + 5i) – (7 – i) = 6 – 1 -2i + 5i - (7 – i)

5 + 5i – (7 – i). Eliminando os parênteses vem 5 + 5 i -7 + i = -2 +6i

Resposta: -2 +6i

a) (3 – j) . (-2 + j5) =-(3 .2) + (3 . j5) + (j.2)- (j.j5) = - 6 + 15j +2j $-5j^2$ com j^2 é igual a -1,vem:

(3 – j). (-2 + j5) = -6 + 15j -5(-1) = -6 +15j +5

Portanto, (3 – j). (-2 + j5) = - 1 + 15j

Resposta: 3 – j). (-2 + j5) = - 1 + 15j

b) $(4 - 3i)^2$ =

Resolução

Trata-se do um produto notável (o quadrado da diferença entre dois termos) estudado lá no fundamental que significa:

Quadrado do primeiro termo - duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo + o quadrado do segundo termo. É isso que vamos aplicar:

$(4 - 3i)^2 = 4^2 - 2.4.3i + (3i)^2$

$(4 - 3i)^2$ = = 16 – 24i + $9i^2$, como i^2 é igual a -1,vem:

$(4 - 3i)^2$ = 16 -24i +9(-1)

$(4 - 3i)^2 = 16 - 24i - 9$, desta forma temos:

$(4 - 3i)^2 = = 16 - 9 - 24i$

Resposta $(4 - 3i)^2 = 7 - 24i$

c) $\frac{2-5i}{1-2i} =$

Resolução

A divisão de um número complexo é feita multiplicando numerador e denominado pelo conjugado do denominador, O conjugado do denominador é 1+2i , então vamos lá:

$$\frac{2-5i}{1-2i} = \frac{(2-5i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = = \frac{(2.1)+(2.2i)-(5i\,.1)-(5i\,.2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i-5i-10\ ^2}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$\frac{2-5i}{1-2i} = \frac{2-1i-10(-1)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2-i+10}{(1-2i)(1+2i)}$$

O denominador é o terceiro caso do produto notável estudado lá no fundamental, que é o produto da soma pela diferença de dois termos, resultando o quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo. Vamos lá:

$$\frac{2-i+1}{(1-4i^2)} = \frac{2-i+1}{(1+4)} \frac{2-i+10}{1+5} = \frac{12-i}{1+5} = \frac{12-i}{6} = \frac{12}{6} - \frac{i}{6} = 2 - \frac{i}{6}.$$

$\boldsymbol{Resposta}$: $\mathbf{2 - \frac{i}{6}}$.

d) $i^{123} + 4i^{35} =$

Resolução

Dividindo 123 por 4,que é o período, temos como resultado 30 com resto 3 . Portanto $i^{123} = i^3$.

Dividindo 35 por 4,que é o período, temos como resultado 7 com resto 3.Portanto $i^{35} = i^3$.

Assim substituindo temos:

$i^3 + 4\,i^3 = 5\,i^3$

Resposta: $5\,i^3$

8) Considerando os números complexos abaixo, determine o que se pede:

a) $Z_1 = 3 – 4i$

b) $Z_2 = 2 + 5i$

c) $Z_3 = 3i = 0 + 3i$

a) $Z_1 + Z_2 + Z_3$

Resolução

a) $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 3 – 4i + 2 + 5i + 0 + 3i$

$Z_1 + Z_2 + Z_3 = (3 + 2 + 0) – (4 -5 – 3)\ i$

$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 5 – (4 – 8)\ i$

$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 5 – (-4)i$

$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 5 + 4i$

Resposta: $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 5 + 4i$

b) $Z_1 - Z_2 = 3 – 4i –(2 + 5i)$

$Z_1 - Z_2 = 3-4i -2 – 5i$

$Z_1 - Z_2 = (3-2) – (4 + 5)\ i$

$Z_1 - Z_2 = 1 – 9i$

Resposta: $Z_1 - Z_2 = 1 – 9i$

c) $Z_1 . Z_3 = ?$

$Z_1 . Z_3 = (3 – 4i) . 3i = 9i -12i^2$

Como i^2 vale -1, vem:

$Z_1 . Z_3 = 3i = 9i +12$

Resposta $Z_1 . Z_3 = 12 + 9i$

Na divisão de complexo devemos multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador.

$$d)\ \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{3-4i}{2+5i} = \frac{(3-4i)(2-5i)}{(2+5i)(2+5i)} = \frac{6-15i-8i+20i^2}{4-25i^2} = \frac{6-23i+20i^2}{4+25} = \frac{6-23i-20}{4+25}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{6-20-23i}{29} = \frac{14-23i}{29} = \frac{14}{29} - \frac{23i}{29}.$$

Resposta: $\boldsymbol{\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{14}{29} - \frac{23i}{29}}$