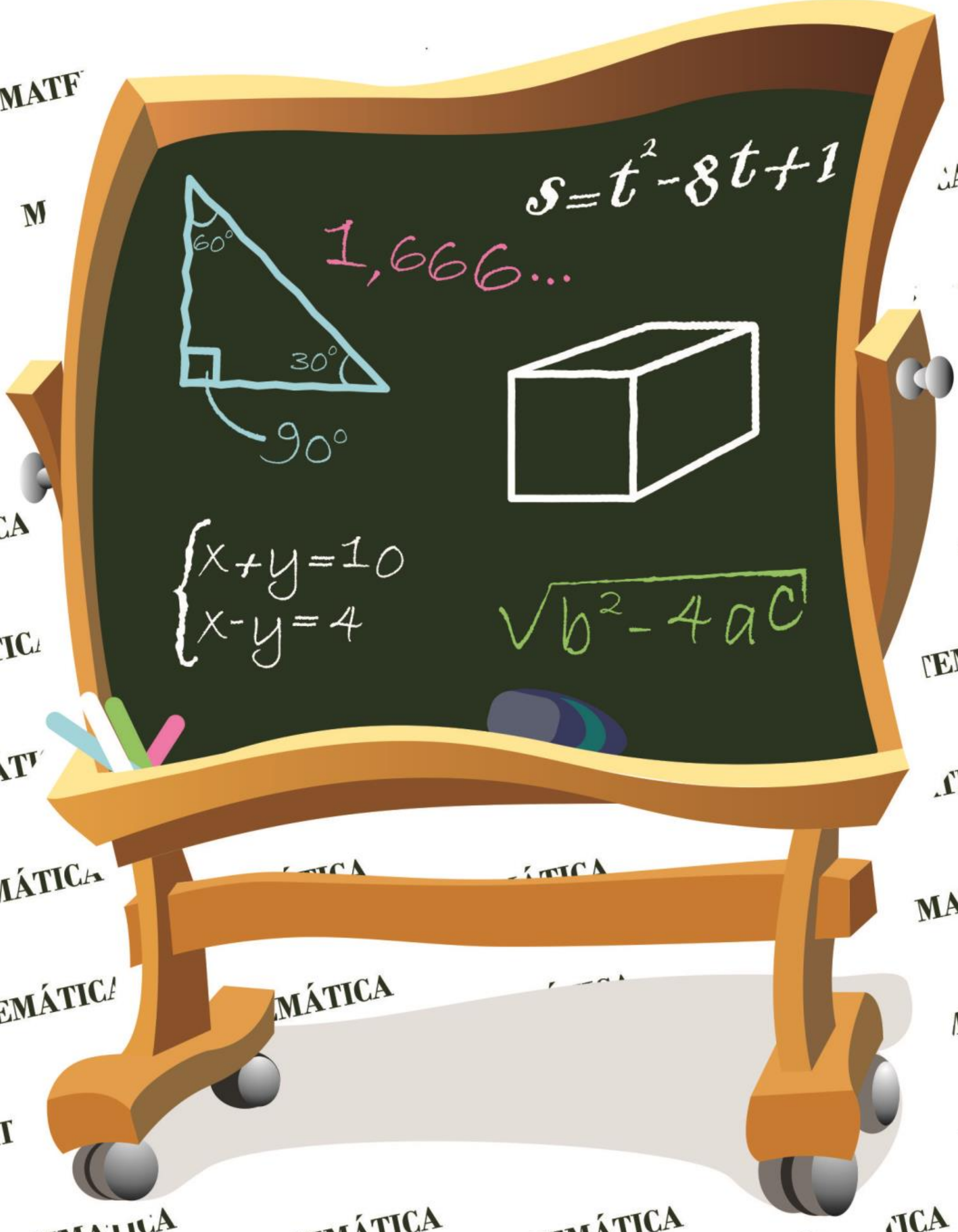
MATEMATICA



FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

ETEVM
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

GOVERNO DO Rio de Janeiro

3º ANO

Geometria analítica

RETA

Parte 1

Apresentação

Muitas vezes nossos alunos nos perguntam: Para que estou aprendendo este conteúdo? Onde vou utilizar isto?

Pensando nisso, procurei nesse trabalho desenvolver o conteúdo de geometria analítica mostrando uma situação real de uma fabricante e no desenrolar do aprendizado criei situações e soluções necessárias para o bom funcionamento de sua fábrica. Através dessas situações e soluções procurei ensinar os conhecimentos de geometria analítica de uma maneira bem clara e simples.

É importante que o aluno saiba que sempre existirá um modelo matemático que irá ajudá-lo na solução de problemas em sua vida profissional e social.

Espero que esta obra contribua de alguma forma no aprendizado dos nossos alunos e também no trabalho do professor em sala de aula.

Sugestões e críticas que visem aprimorar esta obra serão sempre bem-vindas.

Sergio Lopes Rodrigues

.

Equação e inequação linear ajudando as empresas alcançarem seus objetivos

Para que uma empresa consiga atingir seus objetivos principalmente nesse mercado atual competitivo, ela tem que desenvolver seu próprio mecanismo de formação de custos, preços, receitas, mercado, investimento, enfim, obter um modelo ideal que vai desde a programação da produção até a venda de seu produto. É nesse momento que surge um modelo matemático chamado **programação linear** que auxilia na realização de cálculos matemáticos para atender um determinado objetivo, em geral, aumentar lucros ou diminuir custos. Esses objetivos ou condições são representados em forma de equações e inequações lineares.

Diversas áreas utilizam a programação linear para apoio na tomada de decisão. Ela pode definir se é vantagem ou não a abertura de um negócio.

No caso do fabricante citado nos nossos estudos, será que é viável ele vender sua produção por apenas R$ 3,00 a unidade? Será que o lucro máximo que ele pode obter é satisfatório para seu negócio?

Vamos fazer um estudo sobre o assunto respondendo as seguintes perguntas, supondo que ele consiga vender toda sua produção.

1) Se representarmos o custo da produção por **C** e a receita por **R**, as equações do custo e receita fica: $C = 2x + 4000 \ e \ R = 3x,$ onde **x** continua sendo a produção. Sabendo que o lucro de uma empresa é obtido pela diferença entre a receita e o custo $L = R - C$, qual a equação que representaria o lucro **L** em função da produção **x**.

2) Qual a quantidade mínima que a fábrica deve produzir para que o fabricante tenha lucro?

3) Quanto deveria produzir para obter um percentual de lucro de 25% do capital investido no mês, ou seja, 25% do custo total.

4) Se o fabricante quisesse obter um percentual de lucro de 100%, 50% ou 49,9%, ele conseguiria?

Antes de verificar as respostas, tente responder as perguntas.

Vamos lá:

$R = 3x$, $C = 2x + 4000$

1) $L = R - C$ => $L = 3x - (2x + 4000)$ => $L = 3x - 2x - 4000$

$\boldsymbol{L = x - 4000}$

Portanto, a equação que representa o lucro é $\boldsymbol{L = x - 4000}$ **.**

2) Para ter lucro zero teria que produzir:

$0 = x - 4000$ => $\boldsymbol{x = 4000}$

Para ter lucro teria que produzir pelo menos mais uma unidade, ou seja, **4001 unidades.**

3) L = 25% C => *x – 4000 = 0,25 (2x + 4000)* => x – 4000 = 0,5x + 1000

x - 0,5 x = 1000 + 4000 => 0,5x = 5000 => x = 10.000

Portanto, para obter um percentual de lucro de 25% teria que produzir 10 000 unidades.

4) **Para obter um lucro de 100%:**

L = 100% C => *x – 4000 = 1 (2x + 4000)* => x – 4000 = 2x + 4000

x - 2x = 4000 + 4000 => - x = 8000 => x = - 8000

Como a produção não pode ser negativa, o fabricante não poderia alcançar um lucro de 100%.

Para obter um lucro de 50% e 49,9%:

L = 50% C => *x – 4000 = 0,5 (2x + 4000)* => x – 4000 = x + 2000

x - x = 2000 + 4000 => 0x = 8000 => x é impossível calcular.

L = 49,9% C => *x – 4000 = 0,499 (2x + 4000)* => x – 4000 = 0,998x + 1996

x - 0,998x = 1996 + 4000 => 0,002 x = 5996 => x = 2.998.000

Com os cálculos acima podemos concluir que o lucro máximo que ele pode obter é **aproximadamente 50%.** O interessante é que com um lucro de 49,99%

a produção deve ser de 29 998 000 unidades, ou seja, 27 000 000 a mais que a produção com lucro de 49,9%. Se quiser pode conferir fazendo os cálculos. Por isso é importante que as empresas tenham todos seus dados mapeados, para saber qual a melhor tomada de decisão para seu negócio, quanto a quantidade ideal de sua produção para obter melhor percentual de lucro.

Para ilustrar vamos fazer uma tabela do lucro do fabricante em função da produção.

No nosso caso, $L = x - 4000$ e $C = 2x + 4000$

Chamando o percentual do lucro de **p**, temos:

$$L = p \, . C \quad => \quad p = \frac{L}{C}$$

Usando as expressões obtemos a tabela:

Produção (mil unidades)	custo (mil reais)	lucro (mil reais)	Percentual (%)
10	**24**	**6**	**25**
20	**44**	**16**	**36,36**
30	**64**	**26**	**40,62**
40	**84**	**36**	**42,85**
50	**104**	**46**	**44,23**
60	**124**	**56**	**45,16**
70	**144**	**66**	**45,83**
80	**164**	**76**	**46,34**
90	**184**	**86**	**46,73**
100	**204**	**96**	**47,05**
110	**224**	**106**	**47,32**
2998	**60 000**	**2994**	**49,9**
29 998	**600 000**	**29 994**	**49,99**

È importante observar que podemos achar o percentual do lucro máximo através dos coeficientes angulares das retas. Veja:

$L = x - 4000$ e $C = 2x + 4000)$

$p = \frac{L}{C}$ => $p_{max} = \frac{m_L}{mc}$ => $p_{max} = \frac{1}{2} = 0,5$ => $p_{max} = 50\%$

Agora vamos supor que o fabricante possa produzir um produto com o mesmo custo e pudesse vender no mercado a um preço de R$ 5,00 a unidade.

A equação que representa o lucro seria:

$R = 5x$

$C = 2x + 4000$

$L = R - C$ => $L = 5x - (2x + 4000)$ => $L = 5x - 2x - 4000$

$\boldsymbol{L = 3x - 4000}$

Calculando o percentual do lucro Máximo:

$p_{max} = \frac{m_L}{mc}$ => $p_{max} = \frac{3}{2}$ => $p_{max} = 1,5$ => $p_{max} = 150\%$

É fácil verificar que se os **coeficientes angulares** forem **iguais** , o percentual de **lucro máximo será 100%.**

Assim:
Se $m_L < m_c$, $p_{max} < 100\%$

Se $m_L = m_c$, $p_{max} = 100\%$

Se $m_L > m_c$, $p_{max} > 100\%$

Vale lembrar, que nem sempre é mais vantajoso produzir um produto de maior percentual de lucro. O empresário deve analisar todos os fatores que o faça obter um modelo ideal de negócio que vai desde a programação da produção até a venda de seu produto.

Gráfico de uma inequação linear

Como já foi dito anteriormente o fabricante produz na **fabrica 2** camisas e vestidos de malha. O objetivo é saber a quantidade de camisas e vestidos que deverá produzir para obter **receita mensal máxima**.

A situação do fabricante é o seguinte:

Ele dispõe de 3000 metros de tecidos e 3600 horas de trabalho mensais para produção. Cada camisa necessita de 1 metro de tecido, 2 horas de trabalho, e deverá vender por R$ 50,00. Cada vestido necessita de 1,5 de tecido, 1 hora e meia de trabalho e deverá vender por R$ 70,00. Sabe-se que vendendo a esses preços consegue vender toda a sua produção.

Para facilitar a montagem das expressões, organizaremos os dados em uma tabela.

	camisa	vestido	Total (tecido/hora)
tecido	1m	1,5m	3000m
horas	2h	1,5h	3600h

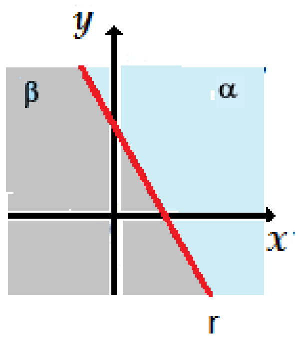
Chamando de **x e y** as quantidades de **camisas e vestidos, respectivamente**. E, lembrando que as **quantidades de camisas e vestido não podem ser negativa**, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 1{,}5\,y \leq 3000 \\ 2x + 1{,}5\,y \leq 3600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

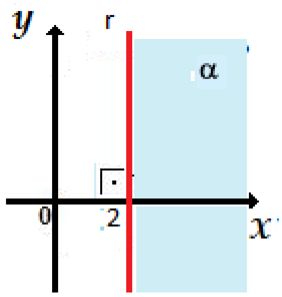
Veja que o sistema é formado por inequações, então a seguir vamos fazer um estudo sobre inequações.

Representação gráfica de uma inequação linear

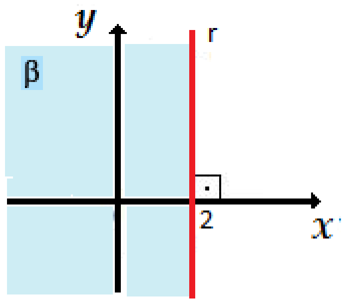
Uma reta **r** define em um plano duas regiões $\boldsymbol{\alpha}$ ***e*** $\boldsymbol{\beta}$ chamadas de semiplanos de origem **r**. Ao traçarmos uma reta em um plano cartesiano, podemos associar os semiplanos a uma inequação.



Na figura abaixo, todos os pontos que pertencem a α *e* β, têm abscissa maior ou igual a 2 e menor ou igual a 2, respectivamente; por isso, podemos representar esses semiplanos por $x \geq 2$ e $x \leq 2$.

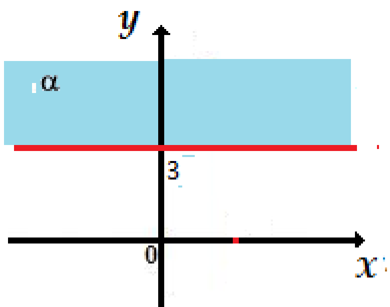


x ≥ 2

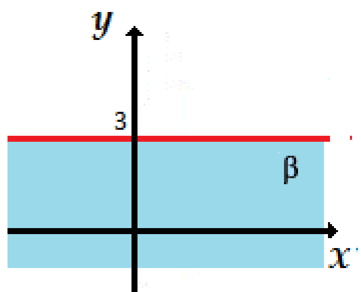


x ≤ 2

Na figura abaixo, todos os pontos que pertencem a α *e* β, têm ordenadas maior ou igual a 3 e menor ou igual a 3, respectivamente; por isso, podemos representar esses semiplanos por $y \geq 3$ e $y \leq 3$.



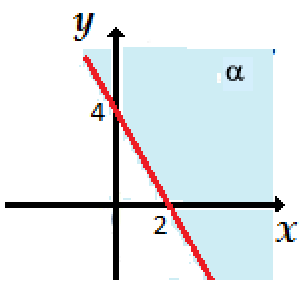
y ≥ 3



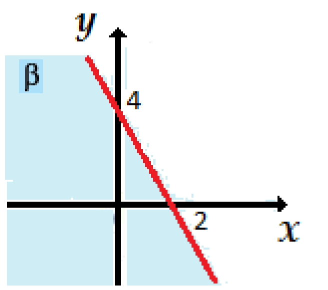
y ≤ 3

Agora representaremos graficamente todos os pontos das inequações.

$y \geq -2x + 4 \; e \; y \leq -2x + 4.$



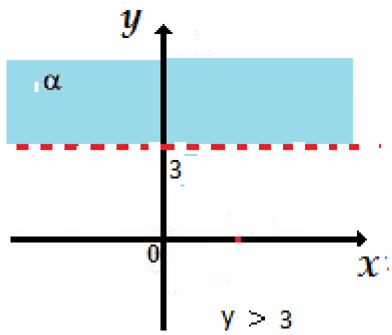
y ≥ -2x + 4

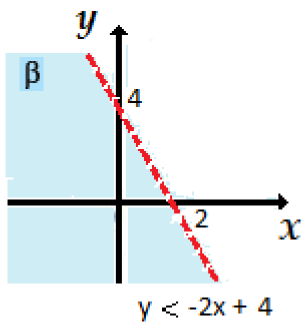


y ≤ -2x + 4

Observe que quando usamos os símbolo (>)**,** os pontos estão **acima** da reta e quando usamos (<) os pontos estão **abaixo** da reta.

Quando quisermos representar um semiplano que não contenha a reta, desenhamos a reta tracejada.



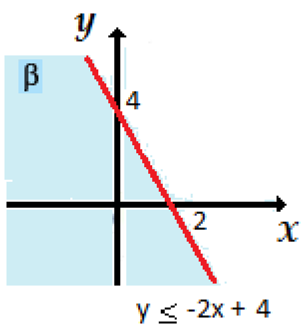


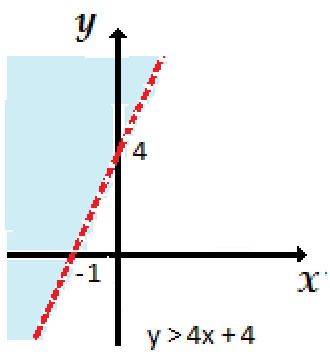
Representação gráfica de um sistema de inequações

Vamos representar graficamente a solução do sistema de inequações:

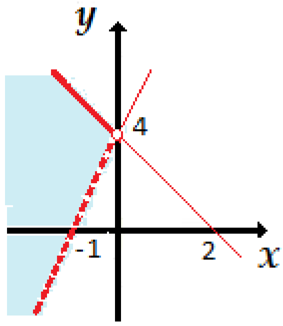
$$\begin{cases} y \leq -2x + 4 \\ y > 4x + 4 \end{cases}$$

Representando graficamente no plano cartesiano os semiplanos determinados por essas inequações, temos:





A interseção dos planos representados pelas inequações é o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem, simultaneamente, as duas inequações, portanto solução do sistema de inequações. Representando graficamente, temos:



$$\begin{cases} y \leq -2x + 4 \\ y > 4x + 4 \end{cases}$$

Note que o ponto (0, 4) de interseção das duas retas não é solução da inequação $y > 4x + 4$; portanto, também não é solução do sistema.

Agora podemos descobrir a quantidade de camisas e vestidos que o fabricante deverá produzir para obter receita mensal máxima representando graficamente o sistema:

$$\begin{cases} x + 1{,}5\,y \leq 3000 \\ 2x + 1{,}5\,y \leq 3600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Inicialmente, para cada inequação do sistema é conveniente isolarmos a variável y.

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{1{,}5}x + \frac{3000}{1{,}5} \\ y \leq -\frac{2}{1{,}5} + \frac{3600}{1{,}5} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} y \leq -\frac{2}{3}x + 2000 \\ y \leq -\frac{4}{3}x + 2400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Para indicarmos no plano cartesiano o semiplano associado a inequação $y \leq -\frac{2}{3}x + 2000$ traçamos a reta $y = -\frac{2}{3}x + 2000.$ Para facilitar a representação da reta no plano, marcamos nele os pontos (0, y) e (x, 0).

Para x = 0, $y = -\frac{2}{3}.0 + 2000$ => $y = 2000$ => (0, 2000)

Para y = 0, $0 = -\frac{2}{3}x + 2000$ => $\frac{2}{3}x = 2000$ => $x = 3000$ => (3000,0)

A solução da inequação corresponde aos pontos localizados abaixo ($\leq$) da reta e que os pertencem.

Para indicarmos o semiplano associado a inequação $y \leq -\frac{4x}{3} + 2400$ traçamos a reta $y = -\frac{4}{3}x + 2400.$ A solução da inequação corresponde aos pontos localizados abaixo ($\leq$) e os pertencente a reta.

Para x = 0, $y = -\frac{4}{3}.0 + 2400$ => $y = 2400$ => (0, 2400)

Para y = 0, $0 = -\frac{4}{3}x + 2400$ => $\frac{4}{3}x = 2400$ => $x = 1800$ => (1800, 0)

É importante também obter o ponto de interseção das retas resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 2000 \\ y = -\frac{4}{3}x + 2400 \end{cases}$$

$$-\frac{2}{3}x + 2000 = -\frac{4}{3}x + 2400$$

$$\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x = 2400 - 2000$$

$$\frac{2}{3}x = 400$$

$$2x = 1200$$

$$x = 600$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2000$$

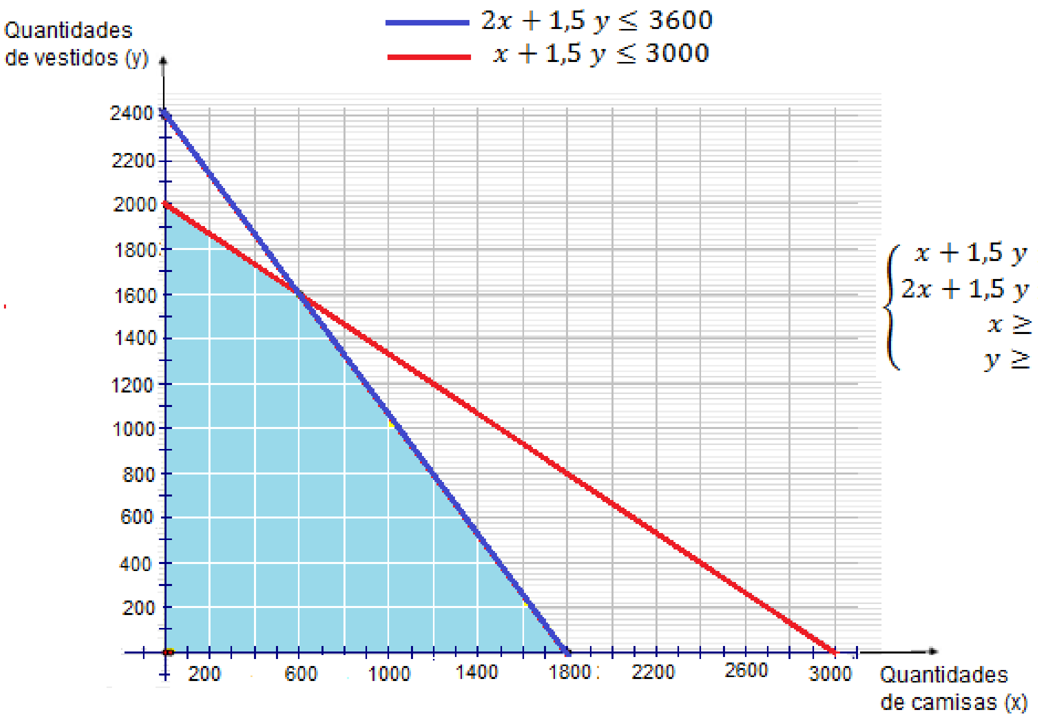
$$y = -\frac{2}{3}.600 + 2000$$

$$y = -400 + 2000$$

$y = 1600$

Portanto o ponto de interseção é (600,1600)

A interseção dos semiplanos representa o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem, simultaneamente, as duas inequações. Isso significa, no nosso caso, que qualquer ponto dessa região representa a quantidade de camisas e vestidos que o fabricante deve produzir com as quantidades de tecidos e horas disponíveis. Veja como ficou o gráfico:



$$\begin{cases} x + 1,5\ y \leq 3000 \\ 2x + 1,5\ y \leq 3600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Agora vamos calcular a quantidade de camisas e vestidos que o fabricante deverá produzir para obter receita mensal máxima.

Como cada camisa custa R$ 50,00 e cada vestido R$ 70,00, a receita obtida com a venda dos vestiários é representada pela expressão: ***R = 50x + 70y***, sendo ***x*** as quantidades de camisas e ***y*** as quantidades de vestidos.

Sabe-se que se um problema de programação linear **tem uma solução**, ela estará **localizada num dos vértices da região admissível**. Portanto, nos vértices (0,0), (0,2000), (1800,0) e (600,1600).

Para descobrir qual é esse vértice, ou seja, as quantidades de vestiários para obter a receita máxima, testamos cada um deles na expressão ***R = 50x + 70y***. A solução será aquela onde o resultado for o maior valor.

V(0, 0) => $R = 50 \cdot 0 + 70 \cdot 0 = 0$

V(0, 2000) => $R = 50 \cdot 0 + 70 \cdot 2000 = 140000$

V(1800, 0) => $R = 50 \cdot 1800 + 70 \cdot 0 = 90000$

V(600, 1600) => $R = 50 \cdot 600 + 70 \cdot 1600 = 142000$

Portanto, para o fabricante obter a receita máxima mensal, ele deverá produzir 600 camisas e 1600 vestidos.

Bibliografia

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. São Paulo, Ática, 2014.

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva – São Paulo, Moderna, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto. Novo Olhar matemática. São Paulo, FTD, 2013.

IEZZI, Gelson. Fundamentos matemática elementar. São Paulo, Atual, 2005