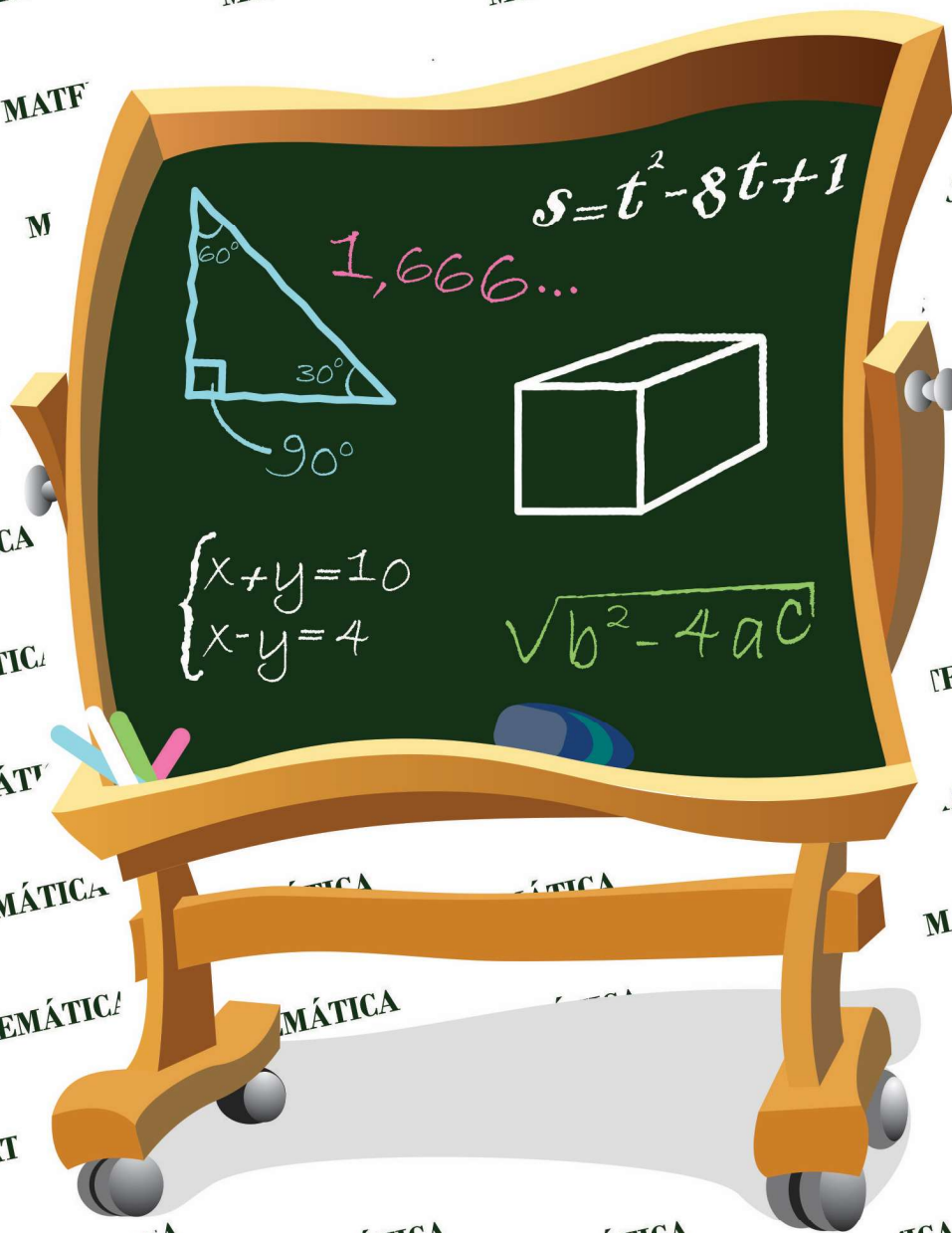


MATEMÁTICA



1º ANO

1ª etapa

Apostila I
Matemática Básica
Regra de três

COORDENAÇÃO
SERGIO LOPES RODRIGUES

Razões

Muitas vezes observamos situações em que podemos chegar a uma conclusão comparando números. Vamos analisar algumas delas:

Oscar e Paulão costumam ser os cestinhas de suas equipes de basquete. Veja o que aconteceu em um jogo:

De seus 50 arremessos, Oscar acertou 40 e Paulão dos seus 60 arremessos, acertou 42. Qual deles teve melhor rendimento?

Observando apenas o número de acertos, não podemos verificar quem foi o melhor, pois devemos observar também o número de arremessos dado por cada um.

Oscar

$$\frac{n^{\circ} \text{ de acertos}}{n^{\circ} \text{ de arremessos}} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

De cada 5 arremessos, acertou 4.

Paulão

$$\frac{n^{\circ} \text{ de acertos}}{n^{\circ} \text{ de arremessos}} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$$

De cada 10 arremessos, acertou 7.

Agora vamos comparar as duas frações e verificar quem teve melhor rendimento.

Para facilitar a comparação podemos transformar a fração em número decimal ou porcentagem.

$$\frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ ou } 80\%$$

$$\frac{42}{60} = \frac{21}{30} = 0,7 = \frac{7}{10} \text{ ou } 70\%$$

Observação:

Para escrevermos uma razão em porcentagem, calculamos a divisão do numerador pelo denominador e multiplicamos o quociente por 100, e em seguida acrescentamos o símbolo %.

$$\frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8 \Rightarrow 0,8 \cdot 100 = 80\%$$

$$\frac{42}{60} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10} = 0,7 \Rightarrow 0,7 \cdot 100 = 70 \%$$

Verificamos então que quatro quintos é maior que sete décimos ($\frac{4}{5} > \frac{7}{10}$), portanto Oscar teve melhor rendimento.

A divisão é uma das formas que usamos para comparar números.

Chamamos a **divisão** $40 : 50$ ou $\frac{40}{50}$ de **razão** entre os números 40 e 50, nessa ordem.

Leitura da razão $\frac{40}{50}$ é a *razão de 40 para 50 ou 40 está para 50*.

A palavra **razão**, vem do latim *ratio*, e significa "**divisão**". Como no exemplo anterior, são diversas as situações em que utilizamos o conceito de razão.

Veja outro exemplo:

Num concurso onde ofereceram 40 vagas foram inscritos 1200 candidatos. Qual a relação candidato vaga?

A relação candidatos vagas é a razão entre o número candidatos e o número de vagas.

$$\frac{1200}{40} \Rightarrow \text{simplificando a razão por 40} \Rightarrow \frac{1200:40}{40:40} = \frac{30}{1}$$

Verificamos que há 30 candidatos para cada vaga..

Razões inversas

Para determinar a razão inversa de uma razão dada, devemos (trocar) os seus termos.

Exemplo: O inverso de $\frac{4}{9}$ é $\frac{9}{4}$

$\frac{4}{9}$ e $\frac{9}{4}$ são razões inversas.

Observe que duas razões são inversas entre si quando o produto delas é igual a 1. Vejamos: $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$

Razões entre grandezas da mesma de natureza

Denomina-se razão entre grandezas de mesma natureza o quociente entre os números que expressam as medidas dessas grandezas numa **mesma unidade**.

Exemplo:

A escala

Uma das aplicações da razão entre duas grandezas de mesma natureza se encontra na escala de redução ou escala de ampliação, conhecidas simplesmente como escala.

No caso de mapas geográficos, plantas de casas, maquetes de projetos, a **escala** determina a razão entre as medidas de um desenho e as medidas reais que correspondem a eles.

$$\text{Escala} = \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}}$$

Exemplo:

1) Um terreno tem 30 m de comprimento. Numa planta, ele tem 15 cm de comprimento. Qual é a escala da planta?

30m = 3000 cm

$$\text{Escala} = \frac{15}{3000} \text{ simplificando por 15} \Rightarrow \frac{1}{200}$$

A escala é 1 : 200

Isso significa que cada 1cm no desenho corresponde a 200cm ou 2m no real.

Razões entre grandezas de naturezas diferentes

Para determinar a razão entre duas grandezas de naturezas diferentes, determina-se o quociente entre as medidas dessas grandezas. Essa razão deve ser acompanhada da notação que relaciona as grandezas envolvidas.

1ª) Velocidade média:

Sergio fez de automóvel o percurso Rio-Angra dos reis(150Km) em 2 horas e meia (2,5h). Qual a razão entre a medida dessas grandezas? O que significa essa razão?

$$\text{Solução: } V_m = \frac{\text{espaço percorrido}}{\text{tempo}} = \frac{150 \text{ km}}{2,5} = 60 \text{ km/h}$$

Razão = 60 km/h (lê-se "60 quilômetros por hora").

Essa razão significa que se Sergio tivesse mantido uma velocidade constante ele teria percorrido 60 km em cada hora.

2ª) Densidade demográfica:

No Censo de 2010 o estado do Rio de Janeiro teve uma população avaliada em 15 993 583 habitantes. Sua área é de 43.696,054 km². Determine a razão entre o número de habitantes e a área desse estado. O que significa essa razão?

Dados: <http://www.suapesquisa.com>. Acessado em 17 de março de 2012.

Solução:

$$\text{Dens.Demogr.} = \frac{n^{\circ} \text{ de habitantes}}{\text{área}} = \frac{15\,993\,583 \text{ hab}}{43\,696 \text{ km}^2} \cong 366 \text{ hab/km}^2$$

Razão = 366 hab/km² (lê-se "366 habitantes por quilômetro quadrado").

Essa razão significa que, se a população do Estado do Rio de Janeiro estivesse distribuída de maneira uniforme em toda sua extensão territorial, haveria por volta de 366 Fluminenses vivendo em cada quilômetro rodado.

Exercícios

1) Escreva as seguintes sentenças sob a forma de razão:

a) 5 professores para 85 alunos.

b) 6 vagas para 54 candidatos.

2) Escreva as seguintes sentenças sob a forma de razão:

a) 4 meses para 1 ano.

b) 1 dia para 15 horas

c) 20 cm para 1m

3) Um terreno tem 50m de comprimento. Numa planta, ele tem 20cm de comprimento. Qual é a escala da planta?

4) Eduardo foi do Rio de Janeiro a Guaratinguetá no seu carro percorrendo 255km. Foram gastos nesse percurso 25 litros de combustível. Qual foi o consumo médio de seu veículo? O que significa essa razão?

Proporções

A proporcionalidade está presente no nosso dia-a-dia. Ela aparece não só na ampliação e na redução de desenhos, mas também, em dosagem de um remédio, receita de bolo, etc.

Veja a seguinte situação:

Se uma árvore produz uma sombra de 5 m e um homem com 1,80 m de altura produz uma sombra de 90 cm, medidas na mesma hora e local, qual é a altura da árvore?

Comparando o comprimento da sombra do homem com sua altura, medidos em centímetros(cm), temos:

$$\frac{90}{180} \Rightarrow \text{simplificando por 90, obtemos: } \frac{90:90}{180:90} = \frac{1}{2}.$$

Como as medidas foram feitas na mesma hora e local, a razão entre o comprimento da árvore e sua altura também será $\frac{1}{2}$.

$$\frac{5\text{m}}{?} = \frac{1}{2}$$

Podemos verificar que a altura da árvore é igual a 10 m, pois $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

A igualdade $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ é uma proporção.

Essa proporção é lida da seguinte maneira: “5 está para 10, assim como 1 está para 2”.

Quando encontramos uma igualdade entre duas razões, a relação matemática é chamada de **proporção**, e dizemos que as quantidades medidas são **proporcionais**.

Dados quatro números racionais **a**, **b**, **c**, **d**, não-nulos, nessa ordem, dizemos que eles formam uma proporção quando a razão de **a** para **b** for igual à razão de **c** para **d**. Assim:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Observe as seguintes proporções:

$\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$	$3 \cdot 16 = 48$ $4 \cdot 12 = 48$
$\frac{7}{5} = \frac{14}{10}$	$7 \cdot 10 = 70$ $5 \cdot 14 = 70$

De modo geral, temos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Daí podemos enunciar a propriedade fundamental das proporções:

Numa proporção, os produtos do numerador de uma fração pelo denominador da outra são iguais.

Aplicação da propriedade

Determinação do termo desconhecido de uma proporção:

1) André viaja 140 km em 2 horas. Quantas horas André levará para percorrer 210 km com a mesma velocidade?

Solução:

Representamos o tempo que André levará para percorrer 210 km por x .

$$\frac{140}{2} = \frac{210}{x} \Rightarrow 140 \cdot x = 2 \cdot 210 \quad (\text{aplicando a propriedade fundamental})$$

$$140 \cdot x = 420 \Rightarrow x = \frac{420}{140} \Rightarrow x = 3$$

Logo, André levará 3 horas.

2) Determine o valor de x na proporção: $\frac{x-2}{2x-1} = \frac{5}{4}$

Solução:

$$4 \cdot (x - 2) = 5 \cdot (2x - 1) \quad (\text{aplicando a propriedade fundamental})$$

$$4x - 8 = 10x - 5 \Rightarrow 4x - 10x = -5 + 8 \Rightarrow -6x = 3 \cdot (-1) \Rightarrow 6x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{6}$$

$$\text{simplificando por 3} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Logo, o valor de x é $-\frac{1}{2}$

3) A planta de uma casa está na escala 1 : 50. Um comprimento de 6 cm na planta corresponde a quantos metros na realidade?



$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50} \Rightarrow 1 \cdot x = 6 \cdot 50 \Rightarrow x = 300$$

O comprimento corresponde 300 cm, ou seja, 3m.

Exercícios

1) Nas proporções abaixo, determine o valor de x.

a) $\frac{x}{3} = \frac{16}{12}$

b) $\frac{4}{5} = \frac{12}{x}$

c) $\frac{9}{x} = \frac{3}{5}$

d) $\frac{3}{2} = \frac{x}{5}$

e) $\frac{x-5}{3} = \frac{x-1}{5}$

f) $\frac{x+3}{x} = \frac{10}{4}$

2) Sabendo que os segmentos AB = 2cm , CD = 5 cm , EF = 10 cm e GH = x cm, formam, nessa ordem, uma proporção, determine o valor de x.

3) Um segmento de 45 cm foi dividido em duas partes diretamente proporcionais aos números 4 e 5. Quais as medidas de cada uma dessas partes ?

Grandezas

Entendemos por **grandeza** tudo aquilo que pode ser medido, contado, como por exemplo: o volume, a massa, a superfície, o comprimento, a capacidade, a velocidade, o tempo, o custo e a produção.

As vezes, a variação de uma grandeza provoca a variação de outra, numa razão direta ou inversa.

Veja os seguintes exemplos:

a) Seu Manoel dono de uma padaria, para facilitar seu dia-a-dia e o do freguês, elaborou uma tabela, listando a quantidade de pães e os preços correspondentes:

Nº de pães	Preços(R\$)
1	0,30
2	0,60
3	0,90
4	1,20
5	1,50

Observe que à medida que a quantidade de pães aumenta o preço também aumenta. Dizemos, então, que as grandezas nº de pães e preço mantêm entre si uma relação diretamente proporcional.

Assim:

Duas grandezas variáveis dependentes são **diretamente proporcionais** quando, aumentando uma delas, a outra **aumenta** na mesma razão da primeira ou vice-versa.

b) Viajando constantemente do Rio de Janeiro para Guaratinguetá, Eduardo observou que dependendo do trânsito, ele levava mais ou menos tempo para chegar ao seu destino. Então, por curiosidade, resolveu fazer alguns cálculos para verificar a velocidade média do seu carro e anotou o resultado numa tabela. Ele sabia que a velocidade média pode ser calculada dividindo-se a distância percorrida pelo tempo gastos na viagem.

O resultado das anotações está na tabela abaixo:

Distância percorrida	Tempo gasto	Velocidade média
255 km	3 h	85 km/h
	3h30min	72,8 km/h
	4 h	63,8 km/h
	4h30min	56,6 km/h

Observe que à medida que o tempo aumenta a velocidade diminui, dizemos, então, que as grandezas tempo e velocidade mantêm entre si uma relação inversamente proporcional.

Assim:

Duas grandezas variáveis dependentes são **inversamente proporcionais** quando, aumentando uma delas, a outra **diminui** na mesma razão da primeira ou vice-versa.

Regra de três simples

Regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvam quatro grandezas, dos quais conhecemos três delas, sejam elas diretamente ou inversamente proporcionais. Devemos, portanto, determinar uma grandeza a partir das três já conhecidas.

Veja agora alguns exemplos resolvidos passo a passo.

1) Uma fábrica engarrafa 3000 refrigerantes em 6 horas. Quantas horas levará para engarrafar 4000 refrigerantes?

Resolução:

1º - Vamos construir uma tabela, onde iremos agrupar as grandezas da mesma espécie em colunas, mantendo na mesma linha todas as grandezas de

espécies diferentes em correspondência e chamando de x a grandeza desconhecida.

Nº de refrigerantes	Tempo (h)
3000	6
4000	X

2º - Observe que: **Aumentando** o número **de refrigerantes**, o **tempo** de produção **aumenta**. Então, podemos afirmar que as grandezas são **diretamente proporcionais**. Assim sendo, **as razões entre suas medidas são iguais**.

Montando a proporção e resolvendo a equação temos:

$$\frac{3000}{4000} = \frac{6}{x} \Rightarrow \text{simplificando a primeira razão por 1000} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{6}{x}$$

$$3 \cdot x = 4 \cdot 6 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{3} \Rightarrow x = 8.$$

Portanto, levará 8 horas.

2) Seis operários constroem uma casa em 120 dias. Em quantos dias 10 operários construiriam essa casa?

Resolução:

1º - construir a tabela

Nº de operários	Tempo (dias)
6	120
10	X

2º - Observe que: **Aumentando** o número **de operário**, o **tempo** de produção **diminui**. Então, as grandezas são **inversamente proporcionais**. Sendo assim, igualamos **uma das razões ao inverso da outra razão**.

Montando a proporção e resolvendo a equação temos:

$$\frac{6}{10} = \frac{x}{120}$$

→ **Termos invertidos**

$$10 \cdot x = 6 \cdot 120 \Rightarrow 10x = 720 \Rightarrow x = \frac{720}{10} \Rightarrow x = 72.$$

Portanto, construiriam em 72 dias.

Regra de três composta

A regra de três composta é utilizada em problemas com mais de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

Exemplo:

Numa empresa, 6 funcionários levam 8 dias montando 12 máquinas, então, nas mesmas condições, 10 funcionários levarão quantos dias para montar 30 máquinas?

1º - construir a tabela

Nº de funcionários	Tempo (dias)	Nº de máquinas
6	8	12
10	X	30

Devemos comparar cada grandeza com aquela onde está o **X**, no caso, é a grandeza tempo de montagem.

2º - Vamos relacionar as grandezas quantidade de funcionários com tempo de montagem. Aumentando o número de funcionários, reduziremos o tempo de montagem. Logo, essas duas grandezas são inversamente proporcionais. Sendo assim, devemos inverter a fração.

3º - Vamos relacionar as grandezas tempo de montagem com número de máquinas. Aumentando o tempo de montagem, o número de máquinas aumenta. Logo, essas duas grandezas são diretamente proporcionais. Sendo assim, devemos manter a fração.

4º - Sabendo dessas informações, devemos igualar a razão que contém o termo x com o produto das outras razões invertidas ou não.

Montando e resolvendo a equação temos:

$$\frac{8}{x} = \frac{10}{6} \cdot \frac{12}{30}$$

 **Termos invertidos**

Simplificando 10 com 30 e 12 com 6, temos

$$\frac{8}{x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{2}{3}$$

$$2 \cdot x = 3 \cdot 8 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{2} \Rightarrow x = 12.$$

Portanto, levará 12 horas.

Resolva os problemas de regra de três

- 1) Uma roda dá 80 voltas em 20 minutos. Quantas voltas dará em 28 minutos?
- 2) Com 8 eletricitas podemos fazer a instalação de uma casa em 3 dias. Quantos dias levarão 6 eletricitas para fazer o mesmo trabalho?
- 3) Uma torneira despeja em um tanque 50 litros de água em 20 minutos. Quantas horas levará para despejar 600 litros?
- 4) Com 6 pedreiros podemos construir uma parede em 8 dias. Quantos dias gastarão 3 pedreiros para fazer a mesma parede?
- 5) Tenho uma certa quantidade de livros para distribuir entre meus melhores alunos, se escolher 6 deles darei a cada um 12 livros. Quantos alunos acabei escolhendo se cada um deles recebeu 8 livros?
- 6) Na construção de uma escola foram gastos 15 caminhões de 4 m^3 de areia. Quantos caminhões de 6 m^3 seriam necessários para fazer o mesmo trabalho?
- 7) Um ônibus, a uma velocidade média de 60 km/h , fez um percurso em 4 horas. Quanto tempo levará, aumentando a velocidade média para 80 km/h ?
- 8) Para se obter 28 kg de farinha, são necessários 40 kg de trigo. Quantos quilogramas do mesmo trigo são necessários para se obter 7 kg de farinha?
- 9) Um relógio atrasa 7 segundos a cada 10 minutos. Quanto atrasará em 4 horas e 30 minutos ?
- 10) Em 8 horas, 20 caminhões descarregam 160 m^3 de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar 125 m^3 ?
- 11) Numa fábrica de brinquedos, 8 homens montam 20 carrinhos em 5 dias. Quantos carrinhos serão montados por 4 homens em 16 dias?

Bibliografia

BARROSO, Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

FACHINI, Walter. Matemática; volume único. São Paulo, Saraiva, 1996.
GIOVANNI, José Rui; BONJORNIO, José Roberto. Matemática. São Paulo, FTD, 1992.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.
IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.
IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva, 2010.

MARCONDES, Carlos Alberto ET AL. Matemática. São Paulo, Ática, 2000.
MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática antes e depois. São Paulo, Saraiva, 2006.

MUNOZ, Aida, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Sites:

<http://www.somatematica.com.br>

Escola 24 horas - <http://www.escola24h.com.br>

<http://www.matematica.com.br>