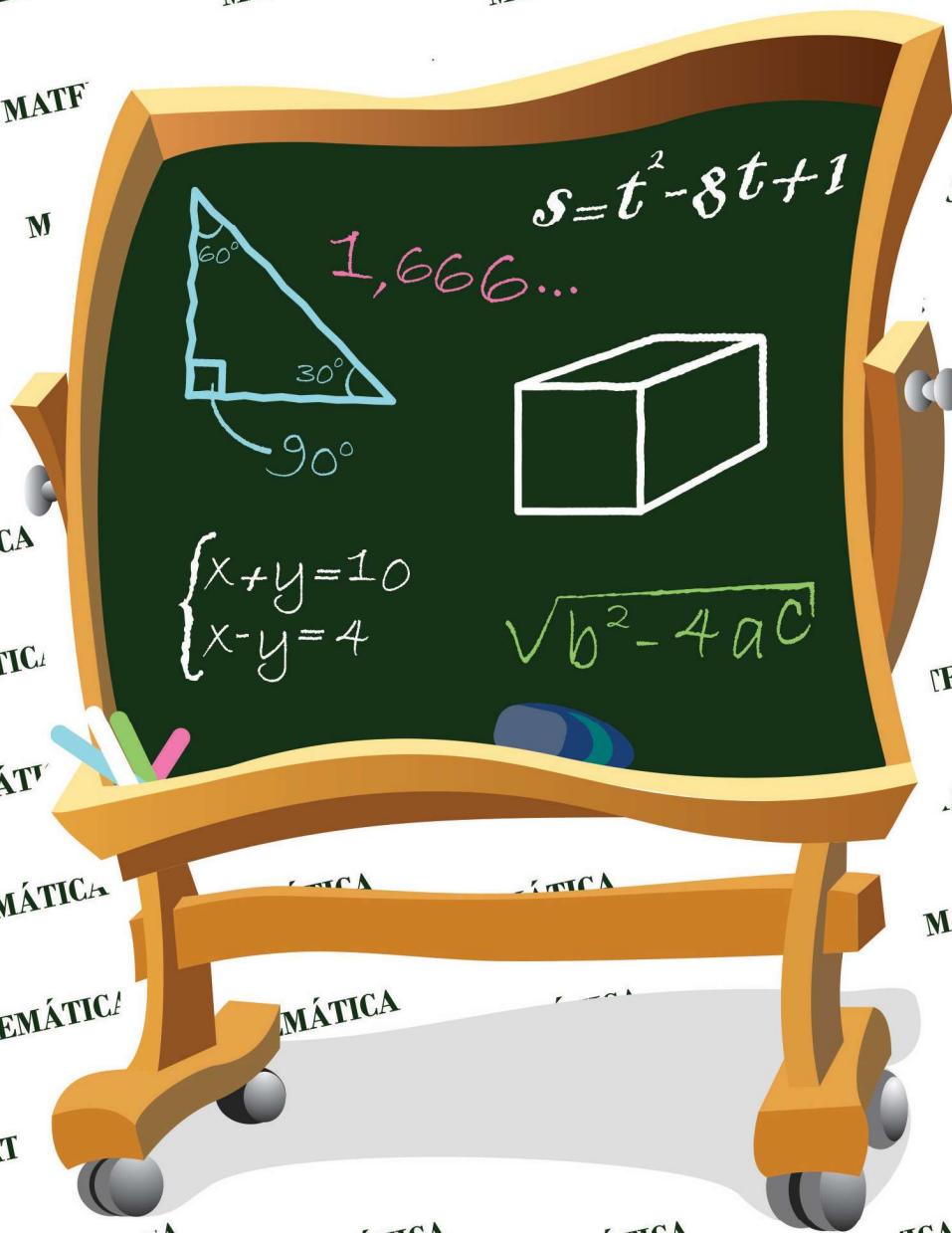


# MATEMÁTICA



1º ANO

1ª etapa

# Apostila I

# Matemática Básica

Revisando sistema de equações do 1º grau

**COORDENAÇÃO**  
**SERGIO LOPES RODRIGUES**

## Sistema de equações do 1º grau

Observe o raciocínio: Eduardo e Fernanda são irmãos. Ao passarem por uma livraria, Fernanda resolveu comprar 2 cadernos e 3 livros e pagou um total de R\$ 67,00. Eduardo gastou R\$ 41,00 na compra de 2 livros e 1 caderno. Os dois ficaram satisfeitos e foram para casa.

No dia seguinte, encontraram um colega e falaram sobre suas compras, porém não se lembravam do preço de cada material escolar. Sabiam, apenas que todos os livros, como todos os cadernos, tinham o mesmo preço.



losmultimídias.wordpress.com

Diante deste problema, será que existe algum modo de descobrir o preço de cada livro ou caderno com as informações que temos?

Para a resolução de problemas como este que apresenta duas incógnitas desconhecidas, utilizamos um sistema de equações.

Agora vamos descobrir o preço de cada caderno e cada livro.

Chamamos de **x** o preço de cada caderno e de **y** o preço de cada livro.

Pelo enunciado:

Fernanda comprou 2 cadernos e 3 livros e pagou R\$ 67,00, ou seja  
 $2x + 3y = 67$

Eduardo gastou R\$ 41,00 na compra de 1 caderno e 2 livros, ou seja  
 $x + 2y = 41$

Vamos montar o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 67 \\ x + 2y = 41 \end{cases}$$

Agora vamos resolver o sistema:

**1º passo:** vamos isolar o **x** na segunda equação para podermos substituir na primeira equação.

$$x + 2y = 41 \Rightarrow x = 41 - 2y$$

**2º passo:** Substituir  $x = 41 - 2y$ , na primeira equação do sistema para encontrar o valor de  $y$ .

$$2x + 3y = 67$$

$$2 \cdot (41 - 2y) + 3y = 67$$

$$82 - 4y + 3y = 67$$

$$-4y + 3y = 67 - 82$$

$$-y = -15 \cdot (-1)$$

$$y = 15$$

**3º passo:** Substituir  $y = 15$  em  $x = 41 - 2y$ , para encontrar o valor de  $x$ .

$$x = 41 - 2y$$

$$x = 41 - 2 \cdot 15$$

$$x = 41 - 30$$

$$x = 11$$

Logo, cada caderno custa R\$ 11,00 e cada livro custa R\$15,00.

### Observação:

Para resolver o sistema de equações acima usamos o **método da substituição**.

Vejamos outro exemplo de resolução de sistema de equações usando o **método da substituição**.

### Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$

Escolhemos convenientemente uma equação e incógnita (de preferência aquela que tem coeficiente igual a 1 e achamos seu valor:

$$2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x$$

Substituímos o valor dessa incógnita na outra equação:

$$x - 3y = -1 \quad \Rightarrow \quad x - 3 \cdot (12 - 2x) = -1$$

Resolvemos essa equação, achando assim o valor de uma das incógnitas:

$$x - 36 + 6x = -1$$

$$x + 6x = -1 + 36$$

$$7x = 35$$

$$x = 5$$

Substituímos o valor de  $x$  em  $y = 12 - 2x$ , a fim de acharmos o valor de  $y$ :

$$y = 12 - 2x$$

$$y = 12 - 2 \cdot 5$$

$$y = 12 - 10$$

$$y = 2$$

Logo, a solução do sistema é  $x = 5$  e  $y = 2$

Podemos usar outros métodos para resolver um sistema, como exemplo, o **método da adição**.

**Veja:**

Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$

O **método da adição** consiste em somar as duas equações membro a membro de modo que uma das incógnitas desapareça.

$$\begin{array}{r} 2x + y = 12 \\ + \quad x - 3y = -1 \\ \hline \end{array}$$

Uma das incógnitas só desaparecerá na adição se os seus coeficientes forem simétricos. Quando não forem simétricos, será preciso ajeitar as equações para torná-los simétricos.

Para torna os coeficientes  $y$  simétricos, basta multiplicar a primeira equação por 3

$$\begin{array}{rcl} 2x + y = 12 & \cdot (3) & \Rightarrow 6x + 3y = 36 \\ x - 3y = -1 & & \Rightarrow + \quad x - 3y = -1 \\ \hline & & 7x = 35 \\ & & x = \frac{35}{7} \Rightarrow x = 5 \end{array}$$

Substituindo  $x$  em  $2x + y = 12$ , temos:

$$2 \cdot 5 + y = 12$$

$$10 + y = 12$$

$$y = 12 - 10$$

$$y = 2$$

**Outro exemplo:**

Resolva o sistema abaixo pelo método da adição:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 2y = 18 \end{cases}$$

Resolução:

Nesse caso para tornar os coeficientes y simétricos devemos multiplicar a primeira equação por 2 (coeficiente de y na segunda equação) e a segunda equação por -3 (simétrico do coeficiente de y da primeira equação).

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y = 5 & \cdot (2) & \Rightarrow 4x + 6y = 10 \\ 5x + 2y = 18 & \cdot (-3) & \Rightarrow -15x - 6y = -54 \\ \hline & & -11x = -44 \quad \cdot (-1) \\ & & 11x = 44 \\ & & x = \frac{44}{11} \\ & & x = 4 \end{array}$$

Substituindo x em qualquer uma das equações, temos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 + 3y &= 5 \\ 8 + 3y &= 5 \\ 3y &= -3 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Logo, a solução do sistema é  $x = 4$  e  $y = -1$

**Para resolver um sistema de equações você deve escolher o método que seja mais conveniente.**

**Exercícios**

1) Um caderno custa x reais e um livro custa y reais . Nessas condições, escreva uma equação que represente cada uma das situações abaixo:

a) O caderno e livro custam juntos 55 reais

b) Se você comprar 1 livro e 4 cadernos, gastará 100 reais.

c) Usando as equações que você achou nos itens anteriores , calcule o preço de cada caderno e cada livro.

2) Em um estacionamento há x carros e y motos, num total de 18 veículos e 60 rodas. Nessas condições:

- a) Escreva a equação que representa o número total de veículos.
- b) Escreva a equação que representa o número total de rodas.
- c) Determine o número de carros e o número de motos que há nesse estacionamento.
- 3) Uma calça custa  $x$  reais e uma camisa custa  $y$  reais. A diferença entre o preço da calça e o preço da camisa é 12 reais. Se 2 calças e 3 camisas custam 224 reais, qual o preço de cada vestuário?
- 4) Para pagar uma conta de R\$ 55,00 usei 27 cédulas, sendo algumas de R\$ 5,00 e outras de R\$ 1,00. A quantidade de cédulas que usei de cada tipo foi, respectivamente:

### Sistema de equações na eletricidade

Na eletrônica e na eletrotécnica, muitas vezes, temos que calcular a corrente elétrica de um circuito usando sistema de equações com mais de duas variáveis. Para isso devemos aprender um método de resolução de sistema de equações chamada de **escalonamento**.

Dizemos que um sistema, em que existe pelo menos um coeficiente não-nulo em cada equação, está **escalonado** se o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não-nulo aumenta de equação para equação.

Observe os exemplos a seguir.

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 0x + 2y = 6 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2y = 6 \end{cases}$$

Note que a primeira equação tem dois coeficientes não-nulos, a segunda tem apenas um.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 6 \\ 0x + y + z = 3 \\ 0x + 0y + z = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y + 3z = 6 \\ y + z = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Note que a primeira equação tem três coeficientes não-nulos, a segunda, dois e a terceira, apenas um.

## Resolução de um sistema escalonado

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 12 & \text{(I)} \\ y + z = 3 & \text{(II)} \\ z = 2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Da equação (I), temos  $z = 2$ . Substituindo o valor de  $z$  na equação (II), obtemos  $y$ :

$$y + 2 = 3 \Rightarrow y = 1$$

Substituindo  $z$  e  $y$  em (I), Obtemos  $x$ :

$$x + 1 + 3 \cdot 2 = 12 \Rightarrow x + 1 + 6 = 12 \Rightarrow x + 7 = 12 \Rightarrow x = 5$$

**Logo,  $x = 5$ ,  $y = 1$  e  $z = 2$**

Se o sistema **não estiver escalonado**, devemos escaloná-lo. Para escalonar um sistema adotamos o seguinte procedimento:

**a)** Fixamos como 1ª equação uma das que possuem o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero.

**b)** Utilizando as propriedades de sistemas equivalentes, anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita das demais equações.

**c)** Repetimos o processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

Resolva o sistema: 
$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 & \text{(I)} \\ x + 2y + z = 3 & \text{(II)} \\ 3x - y - 2z = 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

Trocamos de posição a 1ª equação com a 2ª equação, de modo que o 1º coeficiente de  $x$  seja igual a 1. Fazendo isso, facilitará os cálculos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Somamos a 1ª equação, multiplicada por  $-2$ , com a 2ª equação, assim eliminamos  $x$ . O resultado trocamos pela 2ª equação,:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + z = 3 & \cdot (-2) & = -2x - 4y - 2z = -6 \\ + 2x - 3y - z = 4 & & \\ \hline -7y - 3z = -2 \end{array}$$



$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Trocamos a 3ª equação pela soma da 1ª equação, multiplicada por -3, com a 3ª equação, assim eliminamos x também na terceira equação:

$$\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \quad \cdot (-3) = -3x - 6y - 3z = -9 \\ + \quad 3x - y - 2z = 1 \\ \hline -7y - 5z = -8 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

Trocamos a 3ª equação pela soma da 2ª equação, multiplicada por -1, com a 3ª equação, assim eliminamos y:

$$\begin{array}{r} -7y - 3z = -2 \quad \cdot (-1) = 7y + 3z = 2 \\ -7y - 5z = -8 \\ \hline -2z = -6 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 & \text{(I)} \\ -7y - 3z = -2 & \text{(II)} \\ -2z = -6 & \text{(III)} \end{cases}$$

Agora o sistema obtido já está escalonado e podemos resolvê-lo.

$$-2z = -6 \Rightarrow z = 3$$

Substituindo  $z = 3$  em (II):

$$-7y - 3 \cdot (3) = -2 \Rightarrow -7y - 9 = -2 \Rightarrow y = -1$$

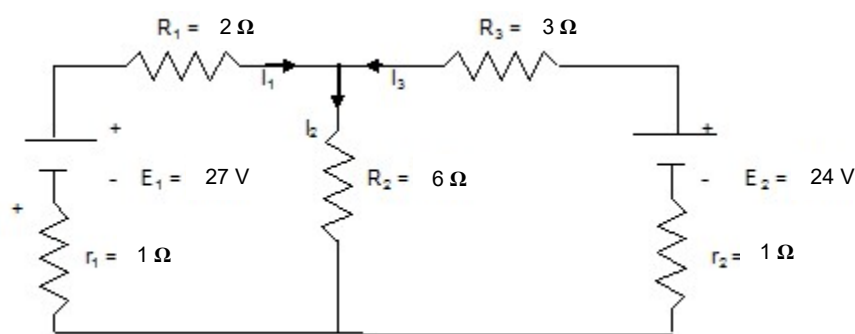
Substituindo  $z = 3$  e  $y = -1$  em (I):

$$x + 2 \cdot (-1) + 3 = 3 \Rightarrow x = 2$$

**Então,  $x = 2$ ,  $y = -1$  e  $z = 3$**

**Agora vamos calcular as correntes de um circuito elétrico usando os conceitos matemáticos de sistemas de equações.**

O circuito abaixo possui:



- dois geradores de forças eletromotrizes (fem)  $E_1 = 27\text{ V}$  e  $E_2 = 24\text{ V}$  e resistências internas  $r_1 = 1\ \Omega$ ,  $r_2 = 1\ \Omega$
- três resistores:  $R_1 = 2\ \Omega$ ,  $R_2 = 6\ \Omega$  e  $R_3 = 3\ \Omega$ .

### Observação:

A unidade de medida de fem é o volt(V); a unidade de medida de resistência elétrica é o ohm( $\Omega$ ).

Resolver um circuito elétrico significa determinar as intensidades das correntes elétricas que nele circulam. A unidade de medida da corrente elétrica é o ampère (A). Nesse circuito, temos três correntes, representadas por  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ .

Para calcular suas intensidades, vamos montar o sistema a seguir, que resulta da aplicação da 1ª e da 2ª lei de **Kirchhoff** no circuito da figura acima.

### Observação:

Essas leis são vistas detalhadamente no estudo de Eletrodinâmica, que pertence à Física.

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 3i_1 + 6i_2 = 27 \\ -6i_2 - 4i_3 = -24 \end{cases}$$

Primeiramente, neste caso, podemos simplificar a 2ª e 3ª equações para facilitar os cálculos:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 3i_1 + 6i_2 = 27 : 3 \\ -6i_2 - 4i_3 = -24 : 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ i_1 + 2i_2 = 9 \\ -3i_2 - 2i_3 = -12 \end{cases}$$

Trocamos a 2ª equação pela soma da 1ª equação, multiplicada por -1, com a 2ª equação, assim eliminamos  $i_1$

$$\begin{array}{rcl} i_1 - i_2 + i_3 = 0 & \cdot (-1) & = -i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 + 2i_2 & = & 9 \\ \hline 3i_2 - i_3 & = & 9 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ i_1 + 2i_2 = 9 \\ -3i_2 - 2i_3 = -12 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 3i_2 - i_3 = 9 \\ -3i_2 - 2i_3 = -12 \end{array} \right.$$

Trocamos a 3ª equação pela soma da 2ª equação com a 3ª equação, assim eliminamos  $i_2$ :

$$\begin{array}{rcl} 3i_2 - i_3 & = & 9 \\ -3i_2 - 2i_3 & = & -12 \\ \hline -3i_3 & = & -3 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 3i_2 - i_3 = 9 \\ -3i_2 - 2i_3 = -12 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \text{ (I)} \\ 3i_2 - i_3 = 9 \text{ (II)} \\ -3i_3 = -3 \text{ (III)} \end{array} \right.$$

Agora o sistema obtido já está escalonado e podemos resolvê-lo.

$$-3i_3 = -3 \Rightarrow i_3 = 1$$

Substituindo  $i_3 = 1$  em (II):

$$3i_2 - 1 = 9 \Rightarrow 3i_2 = 9 + 1 \Rightarrow 3i_2 = 10 \Rightarrow i_2 = \frac{10}{3}$$

Substituindo  $i_2 = \frac{10}{3}$  e  $i_3 = 1$  em (I):

$$i_1 - \frac{10}{3} + 1 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{10}{3} - 1 \Rightarrow i_1 = \frac{10}{3} - \frac{3}{3} \Rightarrow i_1 = \frac{7}{3}$$

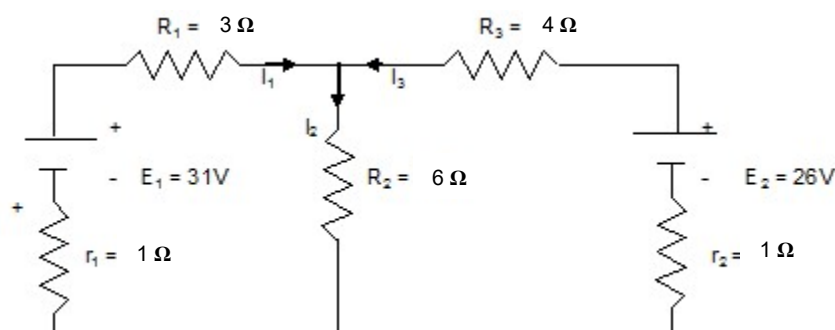
Logo, as correntes do circuito são:  $i_1 = \frac{7}{3}$  A ou  $i_1 \cong 2,33$  A,  $i_2 = \frac{10}{3}$  ou  $i_2 \cong 3,33$  A e  $i_3 = 1$  A.

1) Resolva os Sistemas:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + 3z = 5 \\ y + z = 3 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + 5y - 2z = 4 \end{array} \right.$$

2) Calcule as intensidades das correntes elétricas  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  do circuito abaixo:



$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 4 I_1 + 6 I_2 = 31 \\ -6 I_2 - 5 I_3 = -26 \end{cases}$$

Esse circuito possui dois geradores de forças eletromotrizes (fem)  $E_1 = 31\text{V}$  e  $E_2 = 26\text{V}$  e resistências internas  $r_1 = 1\ \Omega$ ,  $r_2 = 1\ \Omega$ . Três resistores:  $R_1 = 3\ \Omega$ ,  $R_2 = 6\ \Omega$  e  $R_3 = 4\ \Omega$ .

Podemos também resolver sistema de equações utilizando matrizes e determinante. Veja a seguir:

## Matrizes

As matrizes são estruturas matemáticas organizadas na forma de tabela com linhas e colunas, utilizadas na organização de dados e informações. Nos assuntos ligados à álgebra, as matrizes são responsáveis pela solução de sistemas lineares.

A tabela a seguir representa as notas de três alunos em uma etapa:

| Aluno | Matemática | Inglês | Português | história |
|-------|------------|--------|-----------|----------|
| A     | 9          | 7      | 7         | 4        |
| B     | 6          | 8      | 7         | 6        |
| C     | 4          | 5      | 5         | 9        |

Se quisermos saber a nota do aluno **B** em português, basta procurar o número que fica na segunda linha e na terceira coluna da tabela.

Vamos agora considerar uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como no exemplo acima, mas colocados entre parênteses ou colchetes:

$$\begin{matrix} \text{linha} \rightarrow & \begin{pmatrix} 9 & 5 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} & \text{ou} & \begin{pmatrix} 9 & 5 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Em tabelas assim dispostas, os números são os elementos. As **linhas** são enumeradas de cima para baixo e as **colunas**, da esquerda para direita:

$$\begin{matrix} 1^{\text{ª}} \text{ linha} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ 2^{\text{ª}} \text{ linha} & \rightarrow & \\ 3^{\text{ª}} \text{ linha} & \rightarrow & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & & & \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1^{\text{ª}} \text{ coluna} & 2^{\text{ª}} \text{ coluna} & 3^{\text{ª}} \text{ coluna} \end{matrix} \end{matrix}$$

Tabelas com **m** linhas e **n** colunas (**m** e **n** números naturais diferentes de 0) são denominadas matrizes **m x n**. Na tabela anterior temos, portanto, uma matriz 3 x 3.

Veja mais alguns exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{é uma matriz do tipo } 2 \times 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{é uma matriz do tipo } 2 \times 3$$

Costuma-se representar as matrizes por **letras maiúsculas** e seus elementos por letras minúsculas, acompanhadas por dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa.

Assim, uma matriz **A** do tipo **m x n** é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente,  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ , em que  $i$  e  $j$  representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior,  $a_{23}$  é o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna.

Na matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ , temos:

$$\begin{cases} a_{11} = 1, a_{12} = 5 & \text{e} & a_{13} = 7 \\ a_{21} = 4, a_{22} = 8 & \text{e} & a_{23} = -3 \\ a_{31} = 0, a_{32} = 1 & \text{e} & a_{33} = 5 \end{cases}$$

Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

- **Matriz linha:** matriz do tipo  $1 \times n$ , ou seja, com uma única linha. Por exemplo, a matriz

$$A = [9 \ 0 \ -5 \ 2], \text{ do tipo } 1 \times 4.$$

- **Matriz coluna:** matriz do tipo  $m \times 1$ , ou seja, com uma única coluna. Por exemplo,, do tipo  $3 \times 1$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz quadrada:** matriz do tipo  $n \times n$ , ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de ordem  $n$ . Por exemplo, a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{é do tipo } 2 \times 2, \text{ isto é, quadrada de ordem } 2.$$

Numa matriz quadrada  $n \times n$  definimos a **diagonal principal** e a **diagonal secundária**. A **diagonal principal** é formada pelos elementos  $a_{ij}$  tais que  $i = j$ . Na **secundária**, temos  $i + j = n + 1$ .

Veja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal  $i = j$

diagonal secundária  $i + j = n + 1$

Observe a matriz quadrada  $3 \times 3$  a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 7 & 0 & -3 \\ 2 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

diagonal secundária

$a_{11} = -1$  é elemento da diagonal principal, pois  $i = j = 1$

$a_{31} = 2$  é elemento da diagonal secundária, pois  $i + j = n + 1$  ( $3 + 1 = 3 + 1$ )

## Determinantes

Como já vimos, matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo  $n \times n$ ).

A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de **determinante**.

Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos a resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;

## Determinante de 1ª ordem

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem  $M=[a_{11}]$ , o seu determinante é o número real  $a_{11}$ :

$$\det M = |a_{11}| = a_{11}$$

Observação: Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o significado de módulo.

Por exemplo:

$$M = [5] \Rightarrow \det M = 5 \text{ ou } |5| = 5$$

$$M = [-3] \Rightarrow \det M = -3 \text{ ou } |-3| = -3$$

## Determinante de 2ª ordem

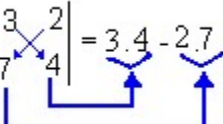
Dada a matriz  $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ , de ordem 2, por definição o determinante associado a  $M$ ,

determinante de 2ª ordem, é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo a seguir.

$$\text{Sendo } M = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}, \text{ temos:}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 7 = 12 - 14 \Rightarrow \det M = -2$$




## Determinante de 3ª ordem

### Regra de Sarrus

O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado **regra de Sarrus**.

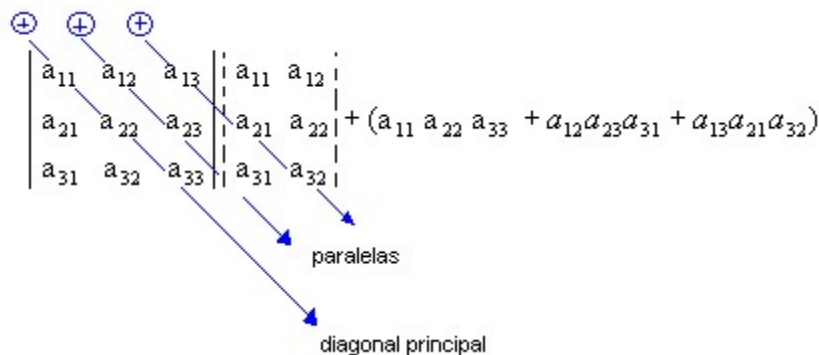
Acompanhe como aplicamos essa regra para .

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

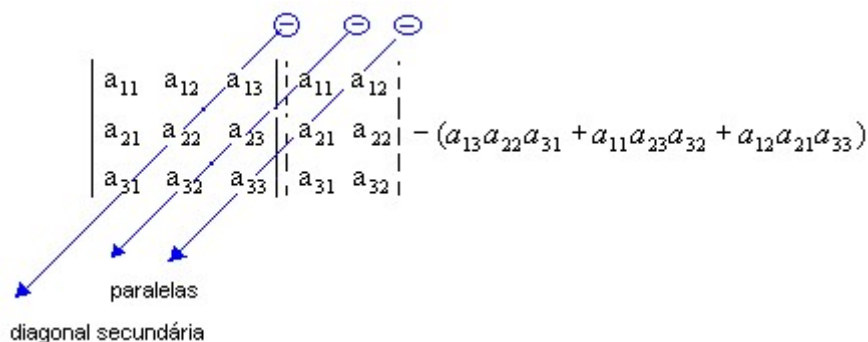
**1º passo:** Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

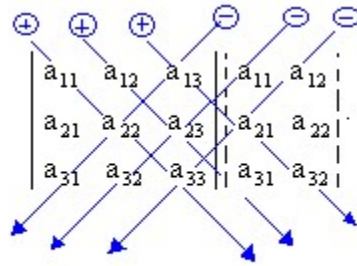
**2º passo:** Encontramos a soma do produto dos elementos da **diagonal principal** com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo):


$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32})$$

**3º passo:** Encontramos a soma do produto dos elementos da **diagonal secundária** com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal ( a soma deve ser precedida do sinal negativo):


$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33})$$

Assim:



$$\det D = (a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}) - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33})$$

**Exemplo:**

1) Calcule o determinante da matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\det A = (5 + 6 - 16) - (10 - 4 + 12) = -23$$

$$\det A = -23$$

**Exercícios**

1) Ache o valor do determinante das seguintes matrizes:

a)  $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b)  $B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c)  $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

d)  $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

## Resolução de um sistema utilizando determinante

Fazendo uso de matrizes e determinante, o matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752) encontrou uma regra prática que permite a resolução de um sistema de equações de **n** equações e **n** incógnitas. Essa regra é conhecida como **regra de Cramer**.

Veja os exemplos de resolução de sistemas utilizando a regra de Cramer.

$$\text{Resolver o sistema } \begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x - y + z = 4 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

### Solução

Calculamos D, Dx, Dy e Dz, em que:

D é o determinante da matriz incompleta formada pelos coeficientes de x, y e z associados ao sistema.

Dx, Dy e Dz são, respectivamente, os determinantes obtidos quando substituímos na matriz incompleta a coluna dos coeficientes de x, y e z pela coluna dos termos independentes.

Então:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \quad (\text{determinante matriz incompleta})$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \quad (\text{trocamos, na matriz incompleta, a coluna dos coeficientes de } x \text{ pela coluna dos termos independentes})$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 21 \quad (\text{trocamos, na matriz incompleta, a coluna dos coeficientes de } y \text{ pela coluna dos termos independentes})$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad (\text{trocamos, na matriz incompleta, a coluna dos coeficientes de } z \text{ pela coluna dos termos independentes})$$

Temos:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{7} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{21}{7} = 3$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{35}{7} = 5$$

Portanto, a solução do sistema é ( 1, 3, 5 ).

## Exemplo 2

Resolver o sistema  $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$ .

*Solução*

Calculemos  $D$ ,  $D_x$  e  $D_y$ .

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 15 = 17$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -7 + 24 = 17 \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{17}{17} = 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 16 + 35 = 51 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{51}{17} = 3$$

O conjunto solução é  $S = \{(1, 3)\}$ .

Resolva os exercícios anteriores de sistema de equações utilizando esse método e verifique qual o método que você mais se identificou.

## Bibliografia

BARROSO, Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

FACHINI, Walter. Matemática; volume único. São Paulo, Saraiva, 1996.  
GIOVANNI, José Rui; BONJORNIO, José Roberto. Matemática. São Paulo, FTD, 1992.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.  
IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.  
IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva, 2010.

MARCONDES, Carlos Alberto ET AL. Matemática. São Paulo, Ática, 2000.  
MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática antes e depois. São Paulo, Saraiva, 2006.

MUNOZ, Aida, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Sites:

<http://www.somatematica.com.br>

Escola 24 horas - <http://www.escola24h.com.br>

<http://www.matematica.com.br>