FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Escola Técnica Estadual Visconde de Mauá

RESOLUÇÃO EXERCÍCIOS LOGARITMO

1) Calcular os logaritmos:

a) $\log_2 16$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 243$ $c)$ $\log_{81} \sqrt{27}$ $d)$ $\log 1000$

Resolução(a)

$\log_2 16$ = x então 16 = $2^x = 2^4$

X = 4

Resolução (b)

$\log_{\frac{1}{3}} 243 \ = x$

$243 \ = (\frac{1}{3})^x$

$(3^{-1})^x = 3^4$

$3^{-x} = 3^4$

X = -4

Resolução (c)

$\log_{81} \sqrt{27} \ = x$

$\sqrt{27} = 81^x$

$\sqrt{3^3} = (3^4)^x$

$3^{\frac{3}{2}} = 3^{4x}$

$\frac{3}{2} = 4x$

X = $\mathbf{\frac{3}{8}}$

2) Usando as propriedades dos logaritmos determine o valor de:

a) $2^{\log_6 5 . \log_2 6}$

b) $3^2 . 3^{\log_3 5}$

c) $\log_3(9.27.81)$

d) $\log_4 2 + \log_4 + 7 \log_4 3$

e) $\log_2 16^3$

f) $\log_5 \frac{25}{625}$

g) $\log_5 300 - \log_5 12$

Resolução (a)

$2^{\log_6 5 . \log_2 6} = 2^{\log_2 6 . \log_6 5}$

$2^{\log_6 5 . \log_2 6} = \left(2^{\log_2 6}\right)^{\log_6 5}$

$2^{\log_6 5 . \log_2 6} = 6^{\log_6 5}$

$2^{\log_6 5 . \log_2 6} = 5$

Resposta: 5

Resolução (b)

$3^2 . 3^{\log_3 5} = 3^2 . 5$

$3^2 . 3^{\log_3 5} = 9.5$

$3^2 . 3^{\log_3 5} = 45$

Resposta:45

Resolução (c)

$\log_3(9.27.81)$ = $\log_3 9 + \log_3 27 + \log_3 81 =$ 2+ 3+ 4 = 9

Resposta:**9**

Resolução (d)

$\boldsymbol{\log_4 2 + \log_4 + 7 \log_4 3}$ **=** $\boldsymbol{\log_4 2.7.3}$ **=** $\boldsymbol{\log_4 42}$

Resolução (e)

$\log_2 16^3$ = 3.$\log_2 16$

Como $\log_2 16$ = 4

Temos:

$\log_2 16^3$ = 3.4 = 12

Resposta: $\mathbf{\log_2 16^3 = 12}$

Resolução (f)

$$\log_5 \frac{25}{625} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 1 - \log_5 25 = \log_5 1 - \log_5 5^2$$

Como o logaritmo de 1 em qualquer base vale 0, vem:

$$\log_5 \frac{25}{625} = -\log_5 5^2$$

$$\log_5 \frac{25}{625} = -2\log_5 5$$

Como $\log_5 5 = 1, vem$:

$$\log_5 \frac{25}{625} = -2.1$$

$$\log_5 \frac{25}{625} = \mathbf{-2}$$

Resolução (g)

$$\log_5 300 - \log_5 12 = \log_5(\frac{300}{12}) = \log_5 25$$

$$\log_5 300 - \log_5 12 = \log_5 5^2$$

$$\log_5 300 - \log_5 12 = 2\log_5 5$$

$$\log_5 300 - \log_5 12 = 2.1$$

$$\log_5 300 - \log_5 12 = 2$$

3) Sendo $\log_b a = 4, \ \ \log_b c = 6 \ e \ \log_b d = -1, calcule \ \log_b \left(\frac{a.c}{d}\right)$

Resolução:

$$\log_b \left(\frac{a.c}{d}\right) = \log_b(a.c) - \log_b d = \log_b(a.c) - (-1)$$

$$\log_b \left(\frac{a.c}{d}\right) = \log_b(a.c) + 1$$

$\log_b(a.c) = \log_b a + \log_b c + 1$

$\log_b(a.c) = 4 + 6 + 1 = 11$

$\mathbf{\log_b(a.c) = 11}$

4 – Sendo $\log_x a = 5,\ \ \log_x b = 2\,, \log_x c = -1, calcule$

a) $\log_x(a^2.b.c)$ $\qquad\qquad$ $b)\ \log_x \frac{\sqrt{ab^5}}{\sqrt[3]{bc^2}}$

Resolução (a)

$\log_x(a^2.b.c) \ = \ 2\log_x a + \log_x b + \log_x c =$ 10 + 2 – 1 = 11

Resposta: 11

Resolução (b)

$\log_x \frac{\sqrt{ab^5}}{\sqrt[3]{bc^2}} = \log_x \sqrt{ab^5} - \log_x \sqrt[3]{bc^2} = \frac{1}{2}(\log_x a + 5\log_x b) - \frac{1}{3}(\log_x b + 2\log_x c)$

$\log_x \frac{\sqrt{ab^5}}{\sqrt[3]{bc^2}} = \frac{1}{2}(5 + 5.2) - \frac{1}{3}(2 + 2(-1))$

$\log_x \frac{\sqrt{ab^5}}{\sqrt[3]{bc^2}} = \frac{15}{2}$

Resposta: $\mathbf{\frac{15}{2}}$

5) Sendo log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, então log 60 vale:

a) 1,78 b) 1,41 c) 1,041 d) 2,141 e) 0,141

Resolução

60 = 2.3.10

$\log 60 = \log(2.3.10) = \log 2 + \log 3 + \log 10$

$\log 60 = 0{,}30 + 0{,}48 + 1$

$\log 60 = 1{,}78$

Resposta letra (a)

6 – Sendo $\log 5 = 0{,}6, \log 7 = 0{,}8, calcule\ o\ valor\ da\ express\tilde{a}o\ \log 25 - 3\log 49 + \log 35$

Resolução:

$\log 25$ = 2$\log 5$ = 2.0,6 =1,2

$3\log 49 = 3\ \log 7^2 = 3.2\ \log 7 = 6.0{,}8 = 4{,}8$

$\log 35 = \log(5.7) = \log 5 + \log 7 = = 0{,}6 + 0{,}8 = 1{,}4$

$\log 25 - 3\log 49 + \log 35 = 1{,}2 - 4{,}8 + 1{,}4$

$\mathbf{\log 25 - 3\log 49 + \log 35 = -2{,}2}$

7) Determine o valor de x nas equações logarítmicas abaixo:

a) $\log_5 25 = x$ $\quad$ $b)\ \log_3 1 = x$ $\quad$ $c)\ \log_{0,1} 100 = x$

$d)\ \log 0{,}001 = x$ $\quad$ e) $\log_x 8 = 3$ $\quad$ $f)\ \log_{\frac{1}{2}} x = 4$

g) $\log_{\frac{5}{2}} \mathrm{x} = -2$ $\quad$ h) $\log_2 \sqrt{8} = x$ $\quad$ i) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{32} = \mathrm{x}$

Resolução (a)

$\log_5 25 = x$

$25 = 5^x$

$5^2 = 5^x$

X = 2

Resolução (b)

$\log_3 1 = x$

$logarítmo\ de\ um\ em\ qualquer\ base\ vale\ zero.$

$\boldsymbol{x = 0}$

Resolução (c)

$\log_{0,1} 100\ = x$

$100 = (0{,}1)^x$

$10^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

$10^2 = 10^{-x}$

X = -2

Resolução (d)

$\log 0{,}001 = x$

$0{,}001 = 10^x$

$\frac{1}{1000} = 10^x$

$10^{-3} = 10^{x}$

X = -3

Resolução (e)

$\log_x 8 = 3$

$8 = x^3$

$2^3 = x^3$

X = 2

Resolução(f)

$\log_{\frac{1}{2}} x = 4$

$X = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\mathbf{X = \frac{1}{16}}$

Resolução(g)

$\log_{\frac{5}{2}} \mathrm{x} = -2$

$X = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$

$X = \left(\frac{2}{5}\right)^{2}$

$\mathbf{X = \frac{4}{25}}$

Resolução (h)

$\log_2 \sqrt{8} = x$

$\sqrt{8} = 2^x$

$8^{\frac{1}{2}} = 2^x$

$2^{(3)^{\frac{1}{2}}} = 2^x$

$2^{\frac{3}{2}} = 2^x$

$\mathbf{X = \frac{3}{2}}$

Resolução (i)

$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{32} = x$

$\sqrt[4]{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

$32^{\frac{1}{4}} = 2^{-x}$

$(2^5)^{\frac{1}{4}} = 2^{-x}$

$2^{\frac{5}{4}} = 2^{-x}$

X = - $\frac{5}{4}$

8) Determine o valor de x para que exista os logaritmos:

a) $\log_7(x-3)$ b) $\log_{(2x+7)}8$ c) $\log_{(2x-1)}\sqrt{5}$ d) $\log_4(x^2-9)$

Resolução (a)

(CE) condição de existência

Logaritmando tem que ser maio que zero

$\log_7(x-3)$

X – 3 > 0

X > 3

Resolução (b)

$\log_{(2x+7)}8$,(CE) condição de existência.

Base maior que zero e diferente de um.

2x + 7 > 0 e 2x + 7$\neq 1$

X > - $\frac{7}{2}$ e

2x $\neq$ 1-7

x $\neq -\frac{6}{2}$

x $\neq -3$

Resposta x > -3,5 e x x $\neq -3$

Resolução (c)

$\log_{(2x-1)} \sqrt{5}$

CE.

$(2x-1) > 0$, logo x > $\frac{1}{2}$

e $(2x-1) \neq 1$, logo x ≠1

Resposta x > $\frac{1}{2}$ *e* x ≠1

Resolução (d)

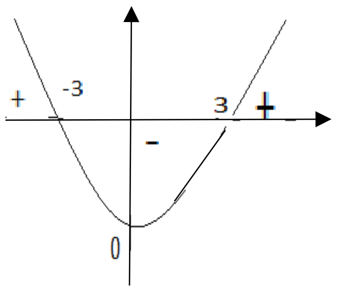
$\log_4(x^2 - 9)$

CE.

$X^2 - 9 > 0$

$X^2 > 9$

X > $\pm$ 3



Observando o gráfico vemos que a função é maior que zero (positiva) quando **X < -3 ou x > 3**

Resposta:

X < -3 ou x > 3

9) Resolva as equações:

a)$\log_2(x-2) = 4$ $\qquad$ $b)\ \log_x 25 = 2$

$c)\ \log_3(4x-1)\ = 3$ $\qquad$ $d)\ \log_2(x^2 - 7x + 13) = 0$ $\qquad$ $e)\ \log_{x+4}(3x-2) = 1$

Resolução (a)

$\log_2(x-2) = 4$

$x - 2 = 2^4$

$x - 2 = 16$

x = 18

Resolução (b)

$\log_x 25 = 2$

25 = x^2

$5^2 = x^2$

X = 5

Resolução (c)

$\log_3(4x - 1) = 3$

4x – 1 = 27

4x = 28

X = $\frac{28}{4}$

X = 7

Resolução (d)

$\log_2(x^2 - 7x + 13) = 0$

$x^2 - 7x + 13 = 2^0$

$x^2 - 7x + 13 = 1$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

Primeiramente verificamos os coeficientes:

a = 1 , b= **-** 7 e c = 12

Depois substituímos na fórmula:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 12$

$\Delta = 49 - 48$

$\Delta = 1$

Agora vamos determinar o valor da incógnita **x**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2\,.1}$$

$$x = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$x` = \frac{7 + 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x`` = \frac{7 - 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Portanto, o valor de x = 4 ou x = 3

Resolução (e)

$\log_{x+4}(3x - 2) = 1$

(3x -2) =(x + 4)

3x –x = 4 + 2

2x = 6

X = 3

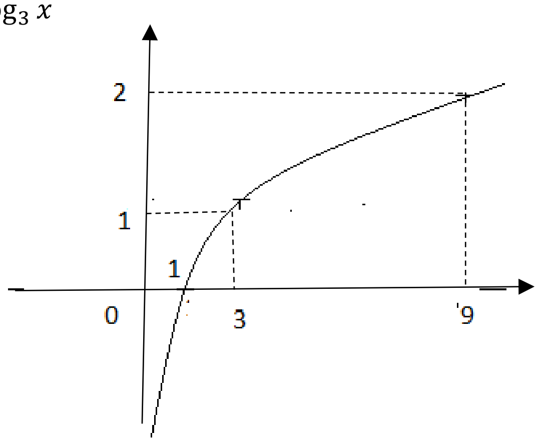
10) Construa o gráfico das funções logarítmicas definidas por:

a) $f(x) = \log_3 x$ $b) f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ $c)$ $\mathrm{f(x)} = \log_2(x - 1)$

Resolução (a)

$f(x) = \log_3 x$

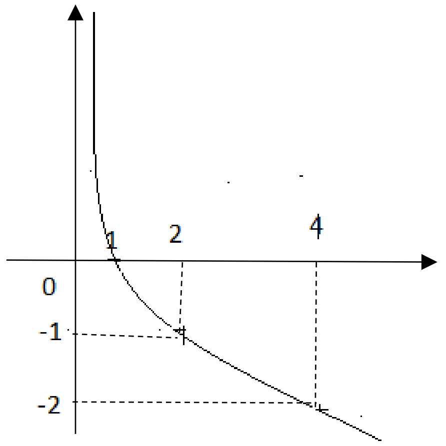
x	y
1	0
3	1
9	2



Resolução (b)

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

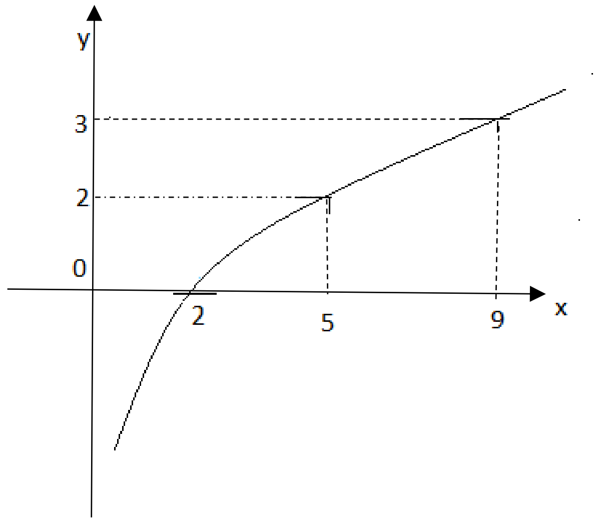
x	y
1	0
2	-1
4	-2



Resolução (c)

$\mathrm{f(x)} = \log_2(x-1)$

x	y
2	0
5	2
9	3



Propriedade das funções.

Se P(a, b) ∈ $f(x) \Longrightarrow P'(b, a)$ ∈ f^{-1}(x)

Traduzindo:

Se um ponto “P” de coordenadas (a, b) pertence a uma função, então o ponto “p” linha de coordenadas (b,a) pertence a sua função inversa.

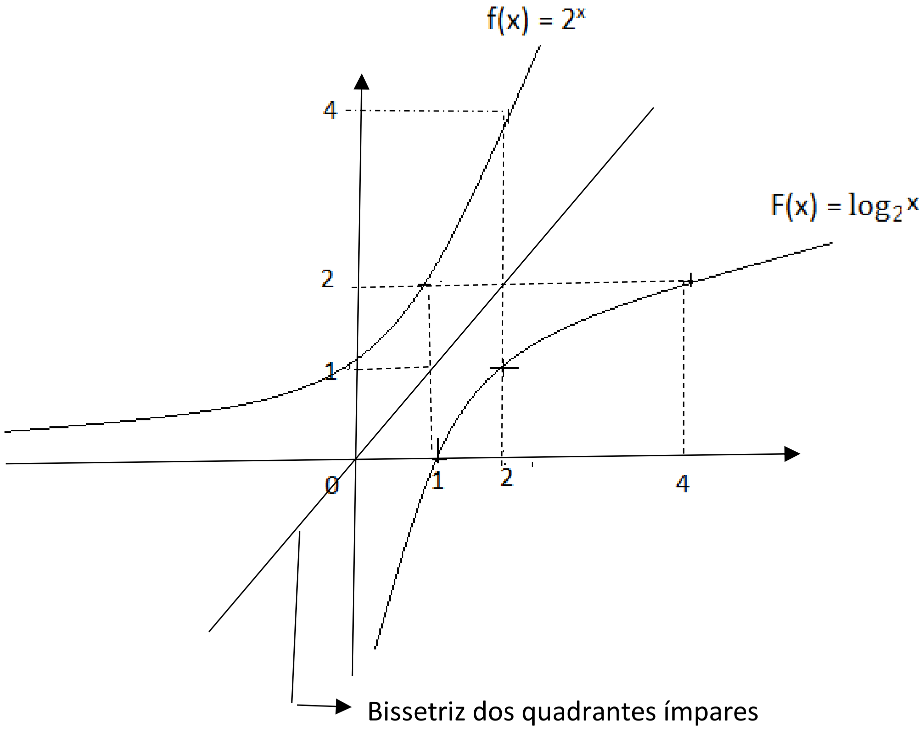
Vajam essa propriedade nas funções:

F(x) = $\log_2 x$ e f(x) = 2^x

Construção do gráfico num mesmo sistema:

x	y
1	0
2	1
4	2

x	y
0	1
1	2
2	4



Observações:

A função exponencial f(x) = 2^x intercepta o eixo vertical no valor um e não toca o eixo horizontal, em quanto que a função logarítmica F(x) = $\log_2 x$ intercepta o eixo horizontal no valor um e não toca o eixo vertical. Elas são simétricas em relação a reta bissetriz dos quadrantes ímpares f(x) = x .

11) O tempo t , em anos, para que um capital de R$1000,00, aplicado na poupança à taxa de 7 % ao ano, produza um montante de R$ 12000,00 é:

Dados: log 2 = 0,3; log 3 = 0,48, log 1,07 = 0,03

a) 36 b) 24 c) 30 d) 18

Resolução:

M = C (1 +i)^t

12000 = 1000(1 + 0,07)^t

12 = 1,07^t

Aplicando logaritmo nos dois membros vem:

$\log 12 = \log(1{,}07)^t$

$\log(4.3) = t\log(1{,}07)$

$\log 2^2 + \log 3 = t\log(1{,}07)$

$2\log 2 + \log 3 = t\log(1{,}07)$

2 . 0,3 + 0,48 = 0,03t

1,08 = 0,03t

T = $\frac{1,08}{0,03}$

T = 36

Resposta t = 36 anos

12) Em pesquisa realizada, constatou-se que a população(P) de determinada bactéria cresce segundo a expressão P(t) = 25. 10^t , em que t representa o tempo em horas. Para atingir uma população de 800 bactérias, será necessário um tempo de:

Dados: log 10 = 1, log 100 = 2 , log 25 = 1,40, log 32 = 1,5.

a) 1 hora b) 1hora e 30 minutos c) 2 horas d) 1hora e 40 minutos

Resolução:

800 = 25. 10^t

$\frac{800}{25}$ =10^tDigite a equação aqui.

32 = 10^t

$\log 32 = \log 10^t$

$\log 32 = t \log 10$

1,5 = 1.t

1,5 = t

Resposta leta b

13) Determine o tempo t , em anos, para que um capital de R$2000,00, aplicado na poupança à taxa de 10 % ao ano, produza um montante de R$ 6000,00?

Dados: log 3 = 0,48, log 1,1 = 0,04

a) 10 anos b) 11 anos **c) 12 anos** d) 13 anos e) 14 anos

M = C (1 + i)^t

6000 = 2000(1+0,1)^t

3 = (1, 1)^t

$\log(3) = \log(1,1)^t$

$\log 3 = t \log(1,1)$

0,48 = 0,04t

t = $\frac{0,48}{0,04}$

t = 12

Resposta letra c

14) Em pesquisa realizada, constatou-se que a população(P) de determinada bactéria cresce segundo a expressão $P(t) = 3.\ 2^t$, em que t representa o tempo em horas. Para atingir uma população de 3000 bactérias, será necessário um tempo de aproximadamente:

Dados: log 2 = 0,3

a) 8 h b) 9 h c) 10 h d) 11 h e) 12 h

Resolução:

$P(t) = 3.\ 2^t$

$3000 = 3.\ 2^t$

$1000 = 2^t$

$10^3 = 2^t$

$\log 10^3 \log 2^t$

$3\log 10 = t \log 2$

$3 = 0{,}3t$

$t = \frac{3}{0{,}3} = 10$

Resposta 10 horas letra c.

15) O pH de uma solução é definido por $PH = \log\left(\frac{1}{H^+}\right)$, onde H^+ é a concentração de hidrogênio em íons grama por litro de solução. Determinar o pH de uma solução, tal que $H^+ = 1{,}0.10^{-8}$.

Resolução:

$PH = \log \frac{1}{1{,}0.10^{-8}}$

$PH = \log 10^8$

$PH = 8.\log 10$

$PH = 8$

16) Num determinado país, a população cresce a uma taxa de 4% ao ano, aproximadamente. Considerando-se como base o ano de 1990, em quantos anos a população desse país triplicará?

Dados: log 3 = 0,47 e log1,04 = 0,017.

a) 24 anos b) 25 anos c) 26 anos **d) 27 anos** e) 28 anos

Resolução:

Considerando como x a população inicial, ela triplicará em 3x.

Logo:

$3x = x\,.(1{,}04)^t$

$3 = .(1{,}04)^t$

$\log 3 = \log(1{,}04)^t$

$\log 3 = t \log(1{,}04)$

$0{,}47 = 0{,}017t$

$t = \frac{0{,}47}{0{,}017}$

t $\cong$ 27

Resposta letra d.