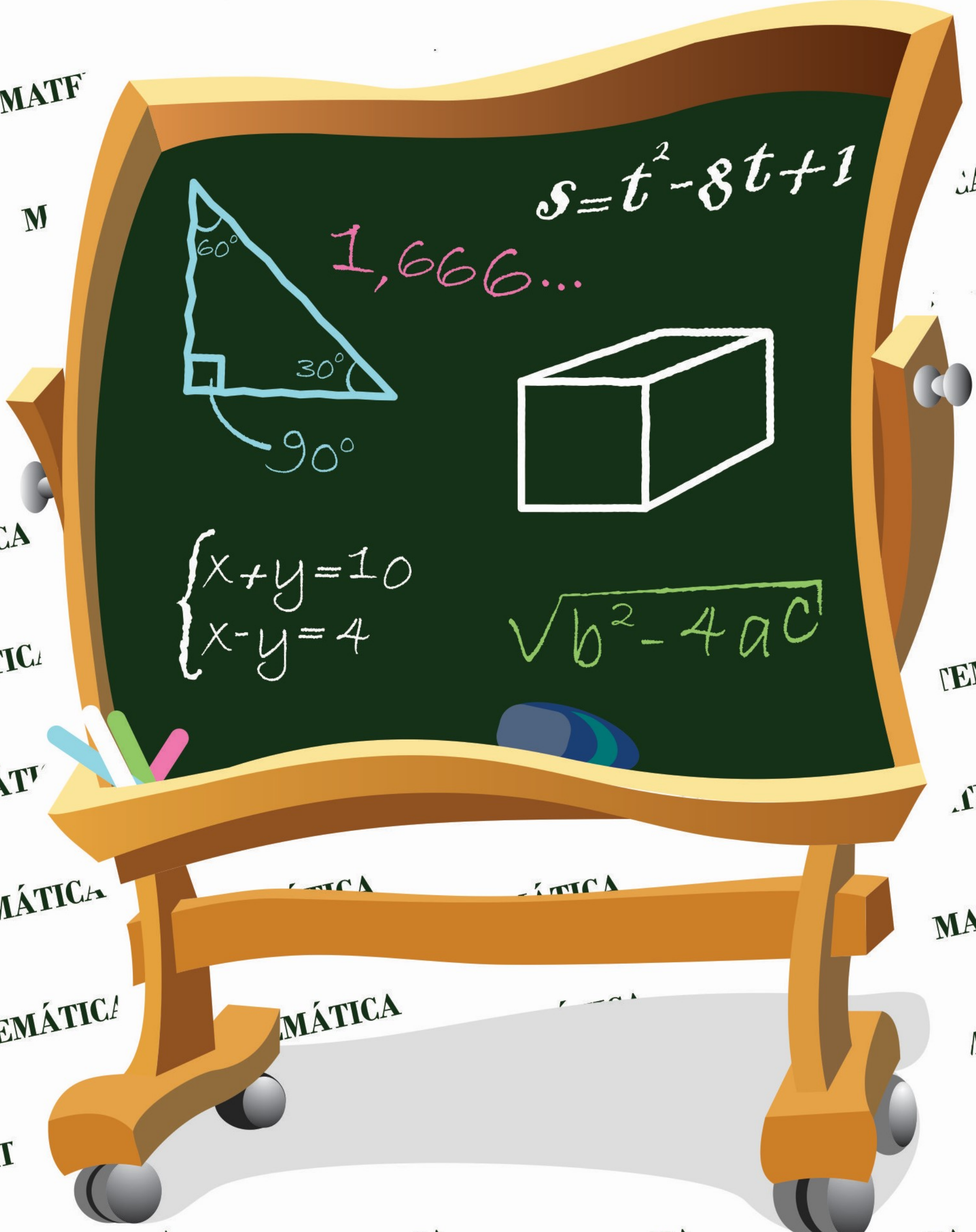
MATEMATICA



FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

ETEVM
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

GOVERNO DO Rio de Janeiro

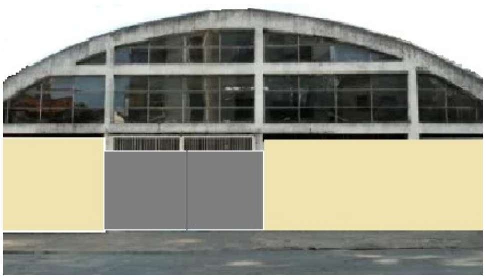
3º ANO

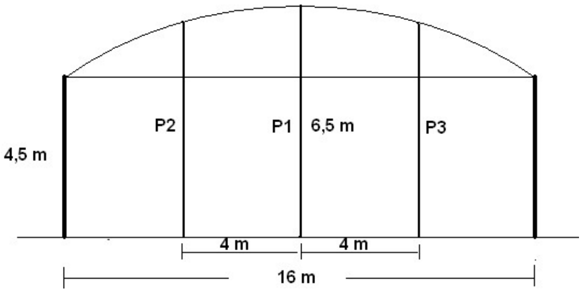
Geometria analítica

EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Circunferência

Como a empresa do fabricante estava crescendo, ele resolveu construir um galpão para estocar mercadorias, cuja linha da cobertura seria parte de uma circunferência perfeita. A largura do galpão teria 16 m, a altura máxima 6,5 m e a altura da parede onde ficariam as vigas de sustentação da cobertura, 4,5m. Agora o engenheiro precisaria calcular as dimensões dos pilares de sustentação usando seus conhecimentos de geometria analítica. Sabe-se que as distâncias entre os pilares teriam 4m. veja figura.

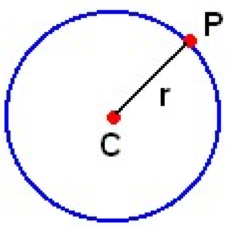




Antes de calcularmos as dimensões dos pilares, vamos aprender alguns conceitos de **circunferência**

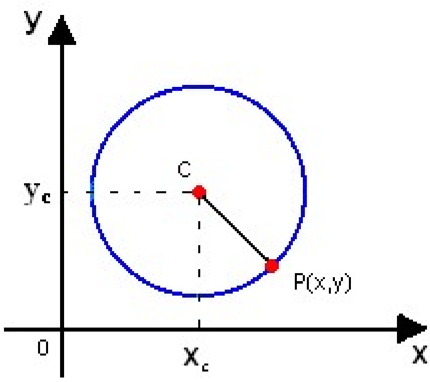
Circunferência

Circunferência é o conjunto de todos os pontos **P**(x,y) de um plano eqüidistantes de um ponto fixo **C**(x_c,y_c), desse mesmo plano, denominado centro da circunferência



Equação reduzida da circunferência

Assim, sendo **C**(x_c, y_c) o centro da circunferência e **P**(x, y) qualquer um de seus pontos, a distância de **C** a **P**(d_{CP}) é o raio **r** dessa circunferência.



Como estudamos, a distância entre os pontos **C** e **P** será:

$d_{cp} = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$

Como $\mathbf{d_{cp}}$ é o raio **r**, temos:

$\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$\boxed{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$$

A equação $\mathbf{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$ é chamada de **equação reduzida** da circunferência.

Observe que se o centro da circunferência estiver na origem C(0,0), a equação da circunferência é $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$.

Exemplos:

1) Determine equação reduzida da circunferência com centro em (2,- 4) e raio igual a 5.

Solução:

$x_c = 2$, $y_c = -4$ e $r = 5$

$\mathbf{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$

$(x - 2)^2 + (y - (-4))^2 = 5^2$

Resposta: $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$

2) Determinar as coordenadas do centro C e o raio r da circunferência de equação $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

Solução:

$\mathbf{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25.$

Pela equação dada, temos:

$x_c = 3$

$y_c = -1$

$r^2 = 25$

$r = \sqrt{25}$

$r = 5$

Resposta: C(3,-1) e r = 5

3) Determinar a equação reduzida da circunferência com centro no ponto

C (2, 3) e que passa pelo ponto P (-1, 2).

Solução:

Sabemos que $r = d_{CP}$. Então:

$d_{cp} = r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$

$r = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (2 - 3)^2}$

$r = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$

$r = \sqrt{1 + 9}$

$r = \sqrt{10}$

Sendo $x_c = 2$,$y_c = 3$ e $r = \sqrt{10}$, temos:

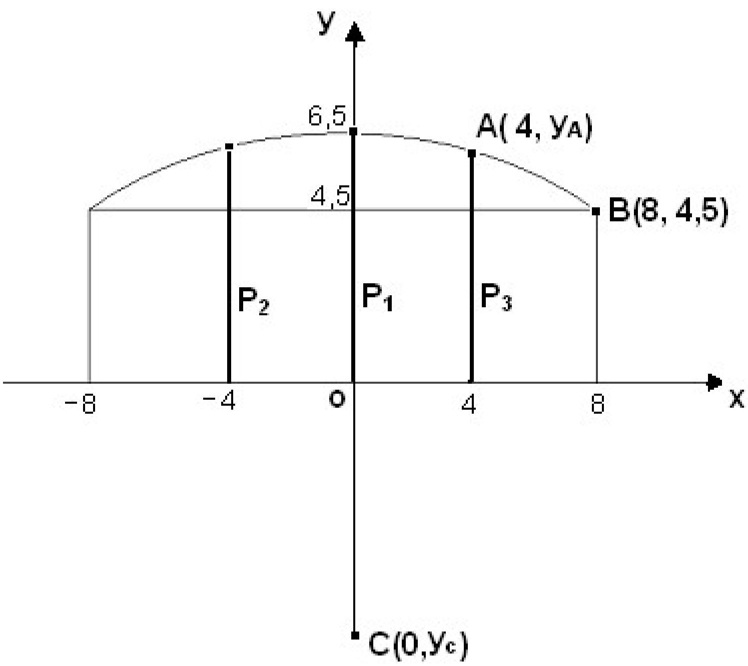
$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{10})^2$

Resposta: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$

Agora podemos calcular as dimensões dos pilares do galpão, através da equação da circunferência representada pela linha da cobertura. . No caso, precisamos calcular apenas um pilar, pois o central P_1 = 6,5 m e por simetria $P_2 = P_3$

Primeiramente, devemos escolher um sistema de eixos cartesianos que coloque a pilar central no eixo y e a largura do galpão no eixo x.



Para obter a equação da circunferência, devemos calcular o raio r e o centro da circunferência **C**.

Raio da circunferência

Para calcular o raio, pegamos um ponto do gráfico, no caso **B(8, 4,5)** e o centro **C(0, y_c)**, substituímos os valores na equação reduzida da circunferência $\mathbf{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$.

Observando o gráfico, y_c é negativo, ou seja, $y_c = -(r - 6,5)$, então, $\mathbf{y_c = 6,5 - r}$

B(8, 4,5) => $x = 8$, $y = 4,5$

C(0, y_c) => $x_c = 0$, $y_c = 6,5 - r$

Substituindo os valores:

$(8 - 0)^2 + [4,5 - (6,5 - r)]^2 = r^2$

$8^2 + (r - 2)^2 = r^2$

$64 + r^2 - 4r + 4 = r^2$

$4r = 68$

$r = 17$

Como $y_c = 6,5 - r$, então $y_c = 6,5 - 17$, $y_c = -10,5$

Assim, **C(0, 10,5)** e **r = 17**

Portanto, a equação da circunferência em questão será $(x - 0)^2 + [y - (-10,5)]^2 = 17^2$ => $\mathbf{x^2 + (y + 10,5)^2 = 289}$

Agora podemos calcular os pilares usando a equação obtida:

Observamos no gráfico que o ponto mais alto de $\mathbf{P_3}$ é o ponto **A(4, y_A)**. Portanto, calculando $\mathbf{y_A}$, estaremos calculando a altura de $\mathbf{P_3}$.

Para calcular $\mathbf{y_A}$, basta substituir a $\mathbf{x_A} = 4$ na equação da circunferência: Veja

$x_A^2 + (y_A + 10,5)^2 = 289$

$4^2 + (y_A + 10,5)^2 = 289$

$16 + (y_A + 10,5)^2 = 289$

$(y_A + 10,5)^2 = 289 - 16$

$(y_A + 10,5)^2 = 273$

$y_A + 10,5 = \sqrt{273}$

$y_A + 10,5 \cong 16,52$

$y_A \cong 16,52 - 10,5$

$y_A \cong 6{,}02$

Portanto, P_3 = 6,02 m

Como P_2 por simetria é igual a P_3, então P_2 = 6,02 m e o pilar central como já sabíamos, terá 6,5 m.

Exercícios

1) Determine a equação reduzida da circunferência:

a) de centro C (1,5) e raio r = 6

b) de centro C (-2, - 7) e raio r = $\sqrt{13}$

c) de centro C (3,0) e raio r = 4

d) de centro C (0,0) e raio r = 1

2) Uma fonte sonora está representada em um plano cartesiano, em que cada unidade equivale a 1m. O ponto (2, 4) representa a localização da fonte cujo som produzido se propaga em todas as direções, atingindo uma distância máxima de 80m. Nessas condições, determine a equação reduzida da circunferência que limita a área atingida por essa fonte sonora.

3) Determine as coordenadas do centro C (x_c, y_c) e o raio da circunferência de equação:

a) $(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 49$

b) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 11$

c) $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 8$

d) $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

e) $x^2 + y^2 = 5$

4) Dentre os pontos A (2, 5), B (0, 5) e C (3, 1), quais pertencem à circunferência de equação $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

5) Uma circunferência com centro em C (- 1 , 2) passa pelo ponto P (2, 0). Qual é a equação dessa circunferência?

6)Determine a equação da circunferência com centro no ponto C (2, 1) e que passa pelo ponto A (1, 1).

7) O centro de uma circunferência é o ponto médio do segmento AB, sendo A (2, -5) e B (-2, -3), Se o raio dessa circunferência é $3\sqrt{2}$, determine a equação da circunferência.

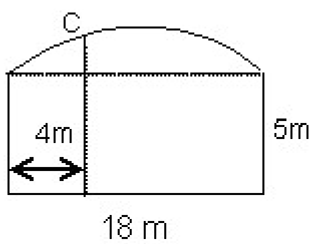
8) O ponto P (-3, b) pertence à circunferência de centro no ponto C (0, 3) e de raio r = 5. Calcule o valor de **b**.

9) Determine a equação de uma circunferência cujo diâmetro é o segmento de extremidade A (2, 8) e B (4, 0).

OBS: O ponto médio do diâmetro AB é o centro da circunferência.

10) A área de um círculo é dada por A = πr^2. Determine a área de um círculo limitado por uma circunferência de centro C (4, -3) e que passa pelo ponto P (1, 1).

11) A figura abaixo representa um galpão visto de frente com altura máxima de 8m. Calcule a distância do ponto C até o solo sabendo que a linha da cobertura é parte de uma circunferência perfeita.



Equação geral da circunferência

Desenvolvendo a equação reduzida, obtemos a equação geral da circunferência:

> Lembrete: $(x - x_c)^2 = (x - x_c).(x - x_c) =$
>
> $x.x + x.(-x_c) + (-x_c).x + (-x_c).(-x_c)$
>
> $= x^2 - x_c x - x_c x + x_c^2 = x^2 - 2x_c x + x_c^2$

$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

$x^2 - 2x_c x + x_c^2 + y^2 - 2y_c y + y_c^2 = r^2$

$\mathbf{x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0}$

Exemplos

1) Vamos determinar a equação geral da circunferência de centro **C**(2, -3) e raio r = 5.

A equação reduzida da circunferência é:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

Desenvolvendo os quadrados dos binômios, temos:

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + 9 - 25 = 0$

$\mathbf{x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0}$

Outro modo:

C(2, -3) e raio r = 5.

Substituindo na fórmula da equação geral ficaria:

$\mathbf{x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0}$

$x^2 + y^2 - 2.2.x - 2.(-3).y + 2^2 + (-3)^2 - 5^2 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + 9 - 25 = 0$

$\mathbf{x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0}$

3) A equação de uma circunferência com centro em C (x_c, y_c) e raio r é $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0$. Determine as coordenadas do centro e o raio r da circunferência.

Resolução 1 – completando os quadrados

$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0.$

$(x^2 + 4x + 4 – 4) +(y^2 - 8y + 16 – 16) + 11 = 0$

$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) + (- 4 - 16 + 11) = 0.$

$(x + 2)^2 + (y – 4)^2 – 9 = 0.$ => $(x + 2)^2 + (y – 4)^2 = 9.$

Pela equação dada, temos:

$\mathbf{(x – x_c)^2 + (y – y_c)^2 = r^2}$

$(x + 2)^2 + (y – 4)^2 = 9.$

$x_c = - 2$

$y_c = 4$

$r^2 = 9$

$r = \sqrt{9}$

$r = 3$

Outro modo

Resolução 2

Observemos as equações:

$\underline{x^2 + y^2}$ $\underline{–2x_c}x$ $- \underline{2y_c}y$ $+ \underline{x_c^2 + y_c^2 - r^2} = 0$ => forma geral (1)

$x^2 + y^2$ $+ 4x$ $- 8y$ $+ 11$ $= 0$ => equação dada (2)

Comparando (1) e (2) , temos:

$-2x_c = 4 \quad \Rightarrow \quad 2x_c = -4 \quad \Rightarrow x_c = -2$

$-2y_c = -8 \quad \Rightarrow \quad 2x_c = 8 \quad \Rightarrow x_c = 4$

C(-2,4)

Cálculo do raio:

$x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 11$

$(-2)^2 + 4^2 - r^2 = 11$

$4 + 16 - r^2 = 11$

$-r^2 = 11 - 20$

$-r^2 = -9$

$r^2 = 9$

$r = \sqrt{9}$

$r = 3$

Resposta: C(-2,4) e r = 3

Exercícios

1) Determinar a equação geral da circunferência de centro **C**(1, 2) e raio r = 4

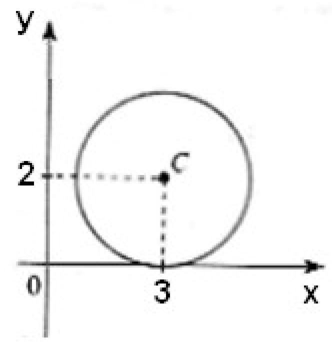
2) Uma circunferência de centro C (3. -1} passa pelo ponto A (6, 3). Escreva a equação geral da circunferência.

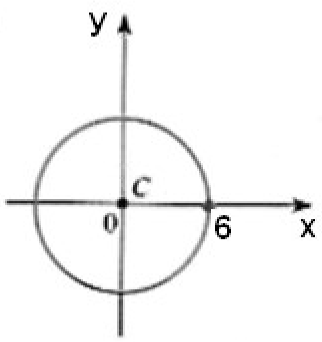
3) A equação de uma circunferência é $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 9 = 0$. Determine as coordenadas do centro e o raio r da circunferência.

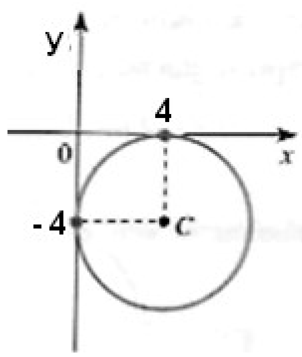
4) Quais as coordenadas do centro de uma circunferência àqual está associada a equação $x^2 + y^2 + 8x + 11 = 0$.

5)) A equação de uma circunferência é $x^2 + y^2 -x - y = 0$. Determine as coordenadas do centro e o raio r da circunferência.

6) Dê as equações das circunferências, de centro C, mostrada nas figuras:

a)


b)


c)


Bibliografia

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. São Paulo, Ática, 2014.

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva – São Paulo, Moderna, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto. Novo Olhar matemática. São Paulo, FTD, 2013.

IEZZI, Gelson. Fundamentos matemática elementar. São Paulo, Atual, 2005