FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Escola Técnica Estadual Visconde de Mauá

Matrizes parte 1

As matrizes são estruturas matemáticas organizadas na forma de tabela com linhas e colunas, utilizadas na organização de dados e informações. Nos assuntos ligados à álgebra, as matrizes são responsáveis pela solução de sistemas lineares.

A tabela a seguir representa as notas de três alunos em uma etapa:

Aluno	Matemática	Inglês	Português	história
A	9	7	7	4
B	6	8	7	6
C	8	5	5	9

Se quisermos saber a nota do aluno **C** em matemática, basta procurar o número que fica na terceira linha e na primeira coluna da tabela, portanto 8.

Vamos agora considerar uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como no exemplo acima, mas colocados entre parênteses ou colchetes:

$$\begin{array}{r} \\ \text{linha} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 9 & 5 & 7 & 4 \\ \boxed{6 \quad 8 \quad 7 \quad 6} \\ 8 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 9 & 5 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 7 & 6 \\ 8 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \text{coluna} \end{array}$$

Em tabelas assim dispostas, os números são os elementos. As **linhas** são enumeradas de cima para baixo e as **colunas**, da esquerda para direita:

$$\begin{array}{l} \text{1ª linha} \to \\ \text{2ª linha} \to \\ \text{3ª linha} \to \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{3ª coluna} \\ \text{2ª coluna} \\ \text{1ª coluna} \end{array}$$

Tabelas com **m** linhas e **n** colunas (**m** e **n** números naturais diferentes de 0) são denominadas matrizes m x n. Na tabela anterior temos, portanto, uma matriz 3 x 3.

Veja mais alguns exemplos:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 2

$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 3

Costuma-se representar as matrizes por **letras maiúsculas**e seus elementos por letras minúsculas, acompanhadas por dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa.

Assim, uma matriz **A** do tipo m x n é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, $\mathbf{A = [a_{ij}]_{m \times n}}$, em que **i** e **j** representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior, $\mathbf{a_{23}}$ é o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna.

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{cases} a_{11} = 1, a_{12} = 5 \quad e \quad a_{13} = 7 \\ a_{21} = 4, a_{22} = 8 \quad e \quad a_{23} = -3 \\ a_{31} = 0, a_{32} = 1 \quad e \quad a_{33} = 5 \end{cases}$$

Exercício resolvido

1) Construa a matriz A = (a_{ij})$_{2x3}$, com a_{ij} = 3i + j.

A matriz A tem 2 linhas e três colunas. Vamos escrevê-la na forma genérica:

$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \end{bmatrix}$ Sendo a_{ij} = 3i + j, temos:

a_{11} = 3 . 1 + 1 = 4

a_{12} = 3.1 + 2 = 5

a_{13} = 3.1+ 3 = 6

a_{21} = 3.2 + 1 = 7

a_{22} = 3.2 + 2 = 8

a_{23} = 3.2 + 3 = 9

Portanto: $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

Matriz linha

É a matriz do tipo 1 x n, ou seja, com uma única linha.

Por exemplo, a matriz A = [9 0 -5 9 8], do tipo 1 x 5.

Matriz coluna

É a matriz do tipo m x 1, ou seja, com uma única coluna. Por exemplo,, do tipo 3 x 1

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Matriz nula

Matriz nula é toda matriz que independentemente do número de linhas e colunas todos os seus elementos são iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Matriz oposta

Dada uma matriz **A**, a matriz oposta a ela é **-A**. Para obtermos a matriz **-A**, basta trocar o sinal de todos os elementos de **A**.

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix},\ \textit{então}\ -A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada

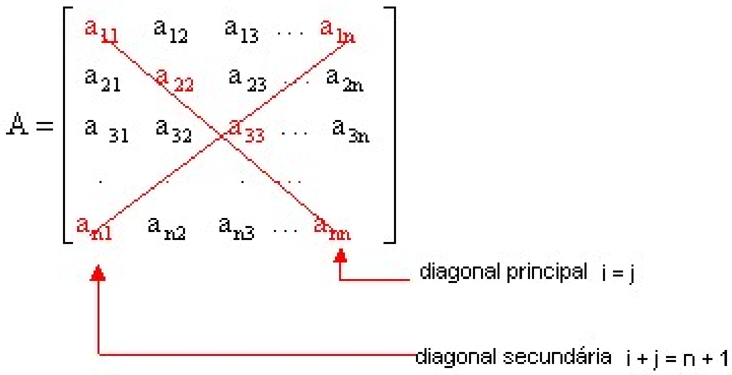
É toda matriz do tipo **n x n**, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; onde **n** dizemos que é a ordem da matriz. Por exemplo, a matriz:

$C = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2 x 2, isto é, quadrada de ordem 2.

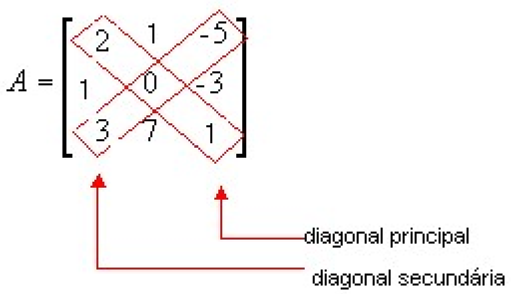
Numa matriz quadrada **n x n** temos a **diagonal principal** e a **diagonal secundária**.

A **diagonal principal** é formada pelos elementos $\mathbf{a_{ij}}$ tal que **i = j** e a **diagonal secundária é** formada pelo elemento $\mathbf{a_{ij}}$, tal que **i + j = n + 1,** onde **n** é a ordem da matriz quadrada.

Veja:



Observe a matriz quadrada 3 x 3 a seguir:



$\mathbf{a_{11}}$ = 2 é elemento da diagonal principal, pois i = j = 1

$\mathbf{a_{13}}$= -5 é elemento da diagonal secundária, pois i + j = n + 1 (1 + 3 = 3 + 1)

Matriz diagonal

É toda **matriz quadrada** em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{4x4}$$

diagonal principal

Matriz identidade

É toda **matriz quadrada** em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Matriz transposta

A matriz transporta de **A** que chamamos de $\mathbf{A}^t$ é obtida a partir da matriz **A** trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas.

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, então\ A^t = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que a 1ª linha de **A** corresponde à 1ª coluna de $\mathbf{A}^t$ e a 2ª linha de A corresponde à 2ª coluna de $\mathbf{A}^t$.

Desse modo, se a matriz **A** é do tipo **m x n**, $\mathbf{A}^t$ é do tipo **n x m**.

Matriz simétrica

É a matriz quadrada de ordem **n** tal que **A = A^t .**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Neste caso **A = A^t**, Portanto, **A** é uma matriz simétrica.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo m x n, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & b \\ 7 & -5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ c & -5 \end{bmatrix}. \quad \textit{Se}\ A = B, \text{então} \ \ b = 0 \text{ e } c = 7$$

Adição de matrizes

Dadas as matrizes A_{mxn} e B_{mxn}, chamamos de soma dessas matrizes a matriz C_{mxn}, tal que $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplos:

Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Então, A + B é igual:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 3+0 & 0+1 \\ 5+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação:

A + B existe se, e somente se, **A** e **B** forem do mesmo tipo, ou seja, se A tem 4 linhas e 5 colunas (A_{4x5}), então B deverá ter 4 linhas e 5 colunas (B_{4x5}).

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** são matrizes do mesmo tipo (m x n), temos as seguintes propriedades para a adição:

a) elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A, sendo 0 a matriz nula m x n

b) elemento oposto: A + (- A) = (-A) + A = 0, ou seja matriz nula.

c) comutativa: A + B = B + A

d) associativa: (A + B) + C = A + (B + C)

Subtração de matrizes

Dadas as matrizes A_{mxn} e B_{mxn}, chamamos de diferença entre essas matrizes a soma de **A** com a matriz oposta de **B**:

A - B = A + (- B)

Exemplos:

Seja $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$

Então, A - B é igual:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}_{-B} = \begin{bmatrix} 6+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dados um número real **x** e uma matriz **A** do tipo m x n, o produto de **x** por **A** é uma matriz **B** do tipo m x n obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por **x**, ou seja, $\mathbf{b_{ij} = x \cdot a_{ij}}$:

Exemplos:

Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Então, **3 . A** é igual a:

$$3.\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 & 3.3 \\ 3.(-2) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo **A** e **B** matrizes do mesmo tipo (m x n) e **x** e **y** números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: **x . (yA) = (xy) . A**

b) distributiva de um número real em relação à adição de matrizes: **x . (A + B) = xA + xB**

c) distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais: **(x + y) . A = xA + yA**

d) elemento neutro : **xA = A**, para x =1, ou seja, **A = A**

Exercícios

1) Classifique as matrizes dadas quanto ao tipo e a ordem:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) Construa a matriz $A = (a_{ij})_{2x3}$, com $a_{ij} = 2i + j$.

3) Se $M = (a_{ij})_{3x2}$ é uma matriz tal que i^{j+1} , para i = j e j para i ≠ j. Então, M é:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
d. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

4) Seja $X = (x_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 2, onde i + j para i = j ;1 - j para i > j e 1 se i < j . A soma dos seus elementos é igual a:

a. -1
b. 1
c. 6
d. 7
e. 8

5) A solução da equação matricial $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ x & x^2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & x+4 \\ 3x+4 & 2 \end{pmatrix}$ é :

a. 3
b. 2
c. -1
d. -2
e. 4

6) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, calcule:

a) A **+** B

b) A **–** B

c) $(A + B)^t$

d) 2B

e) 2A – 3B

f) $\frac{1}{2}A$

7) Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{2x2}$, com $a_{ij} = i^2 + j^2$, e $B = (b_{ij})_{2x2}$, com $b_{ij} = i^j$, calcular 2A + B .

8) (OSEC - SP) Em $\begin{pmatrix} x^2 & y^3 \\ x^2 & y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x & -y \\ 4x & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ x e y valem respectivamente:

a. -4 e -1
b. -4 e 1
c. -4 e 0
d. 1 e -1
e. 1 e 0

9) (SANTA CASA - SP) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

se A^t é a matriz transposta de A, então (A^t - B) é:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

10) Uma rede de lojas é composta de 3 lojas, numeradas de 1 a 3. A tabela a seguir apresenta o faturamento, em reais, de cada loja nos quatro primeiros meses do ano de 2020.

$$\begin{bmatrix} 48000 & 41000 & 33000 & 19000 \\ 77000 & 62000 & 51000 & 47000 \\ 38000 & 30000 & 26000 & 19000 \end{bmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o faturamento da loja i no mês j. O faturamento da loja 2 no mês de março foi:

a) R$ 30.000,00

b) R$ 51.000,00

c) R$ 33.000,00

d) R$ 19.000,00

11) Cada elemento a_{ij} das tabelas abaixo representa o preço das camisas e calças do modelo **i** e número de parcelas **j** de uma loja.

Camisa

$$\begin{bmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 \\ 18 & 19 & 20 & 21 \\ 28 & 29 & 30 & 31 \\ 43 & 44 & 45 & 46 \\ 34 & 35 & 36 & 37 \end{bmatrix}$$

calças

$$\begin{bmatrix} 25 & 26 & 27 & 28 \\ 33 & 34 & 35 & 36 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \\ 60 & 61 & 62 & 63 \\ 42 & 43 & 44 & 45 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que as tabelas mostram 5 modelos parcelados em até 4 vezes.

Se você comprar uma calça e duas camisas do modelo 2 em 3 parcelas pagará:

a) R$ 76,00

b) R$ 75,00

c) R$ 72,00

d) R$ 110,00