FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Escola Técnica Estadual Visconde de Mauá

RESOLUÇÃO EXERCÍCIOS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

1) Qual é o expoente da base:

a) 2 para que o resultado seja igual a 32?

Resolução

Fatorando o número 32,teremos 2^5

Desta forma temos $2^x = 2^5$

Comparando os expoentes temos:

X = 5

Resposta: 5

b) 5 para que o resultado seja igual a $\frac{1}{5}$?

Resolução

$\frac{1}{5} = 5^{-1}$

Desta forma temos

$5^x = 5^{-1}$

Comparando os expoentes temos:

X = -1

Resposta: -1

c) 8 para que o resultado seja igual a 1?

Resolução

É do nosso conhecimento que todo número diferente de zero elevado a zero é igual a um. Então temos:

$8^0 = 1$

$8^x = 8^0$

Comparando os expoentes temos:

X = 0

Resposta: 0

d) 16 para que o resultado seja igual a 4?

Resolução

$16 = 4 \,.\, 4 = 4^2$

Portanto $16^x = (4^2)^x$

Assim temos:

$(4^2)^x = 4$

Multiplicando os expoentes, temos

$4^{2x} = 4^1$

Comparando os expoentes temos:

2x = 1

$X = \frac{1}{2}$

Resposta: $\mathbf{\frac{1}{2}}$

e) 81 para que o resultado seja igual a 27?

Resolução

Fatorando os números 81 e 27, temos

$81 = 3^4$ e $27 = 3^3$

Portanto $81^x = (3^4)^x$ e $27^2 = 3^3$ .Logo temos:

$(3^4)^x = 3^3$ multiplicando os expoentes do primeiro termo, em:

$3^{4x} = 3^3$

Comparando os expoentes temos:

4x = 3, portanto $x = \frac{3}{4}$

Resposta: $\mathbf{\frac{3}{4}}$

2) Resolva as equações exponenciais:

a) $16^x = 256$

Resolução

Fatorando os números 16 e 256, temos 2^4 e 2^8.Desta forma vem:

$(2^4)^x = 2^8$

$4x = 8$

$X = \frac{8}{4} = 2$

Resposta: 2

b)$6^{x-2} = 36$

Resolução

$36 = 6^2$

$6^{x-2} = 6^2$

$x - 2 = 2$

$x = 4$

Resposta: 4

c) $49^{x-2} = \frac{1}{7}$

Resolução

$49 = 7^2$ e $\frac{1}{7} = 7^{-1}$

$(7^2)^{2-x} = 7^{-1}$

Multiplicando os expoentes do primeiro membro vem:

$4 - 2x = -1$

$2x = 5$

$X = \frac{5}{2}$

Resposta: $\mathbf{\frac{5}{2}}$

d) $64 = (1024)^x$

Resolução

$64 = 2^6$ e $1024 = 2^{10}$

$2^6 = (2^{10})^x$

Multiplicando os expoentes do segundo membro, temos:

$2^6 = 2^{10x}$

$10x = 6$

X = $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}$ **=** $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$

Resposta: $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$

e) $4^x - 10.\ 2^x + 16 = 0$

Resolução

$4 = 2^2$ substituindo na equação tem:

$(2^2)^x$ -10. $2^x + 16 = 0$

Invertendo os expoentes vem:

$(2^x)^2 - 10.\ 2^x + 16 = 0$

Fazendo $2^x = y$,$(2^x)^2 = y^2$

Fazendo as substituições na equação temos:

$y^2 - 10y + 16 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4.\ 1.\ 16 = 100 - 64 = 36$

Y = $\frac{-(-10)\pm\sqrt{36}}{2}$

$Y_1 = \frac{10+6}{2} = 8$

$y_{2=}\ \frac{10-6}{2} = 2$

Como fizemos $2^x = y$, vem:

Para $y = 8 = 2^3$

Temos $2^x = 2^3$,x = 3

Para y = 2, temos:

$2^x = 2$, x = 1

Resposta

X = 1 ou x = 3

f) = $2^{x^2-7x+12} = 1$

Resolução

$1 = 2^0$.Substituindo na equação temos:

$2^{x^2-7x+12} = 2^0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4.\ 1.\ 12 = 49 - 48 = 1$

x = $\frac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2}$

$x_1 = \frac{7+1}{2} = 4$

$x_{2=} \frac{7-1}{2} = 3$

Resposta x = 3 ou x = 4

g) $(0,4)^{4x+1} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

Resolução

$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}$ e $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Substituindo temos:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4x+1} = \frac{2}{5}$$

4x + 1 = 1

4x = 0

X = 0

Resposta: X = 0

h) $4^{3-x} = 1$

Resolução

$1 = 4^0$

$4^{3-x=}4^0$

3 – x = 0

X = 3

Resposta: x = 3

3) Em pesquisa realizada, constatou-se que a população (P) de determinada bactéria cresce segundo a expressão $P(t) = 25 . 2^t$, em que t representa o tempo em horas. Para atingir uma população de 400 bactérias, será necessário um tempo de :

a) 4 horas

b) 3 horas

c) 2 horas e 30 minutos

d) 2 horas

e) 6 horas

Resolução:

$P(t) = 25 . 2^t$

Do enunciado P(t) = 400

$400 = 25 \cdot 2^t$

$\frac{400}{25} = 2^t$

$2^t = 16$

$2^t = 2^4$

T = 4

Resposta letra a

4) (FIC / FACEM) A produção de uma indústria vem diminuindo ano a ano. Num certo ano, ela produziu mil unidades de seu principal produto. A partir daí, a produção anual passou a seguir a lei $y = 1000 \cdot (0,9)^x$. O número de unidades produzidas no segundo ano desse período recessivo foi de:

a) 900b) 1000 c) 180 d) 810 e)90

Resolução:

$y = 1000 \cdot (0,9)^x$

Num certo ano, ou seja, no ano 0, a indústria produziu 1000 unidade, realmente segundo a lei em questão, temos x = 0,$y = 1000 \cdot (0,9)^0$, y = 1000. 1, y = 1000.

Desta forma no primeiro ano de recessão, temos x = 1.

$y = 1000 \cdot (0,9)^1$

y = 1000 . 0,9

y = 900

Portanto, no segundo ano de recessão, temos x = 2.

$y = 1000 \cdot (0,9)^2$

y = 1000 . 0,81

y = 810

Resposta: letra c

5) Em uma pesquisa realizada constatou-se que a população P em milhares de habitantes de uma determinada região cresce segundo a lei $P(t) = 5 \cdot 3^t$, em que t representa o tempo em anos. Para que população atinja uma quantidade de 405 mil habitantes, será necessário um tempo de t anos dado por:

a) 3 **b) 4** c) 5 d) 6 e) 7

Resolução:

$P(t) = 5 \cdot 3^t$

$405 = 5 \cdot 3^t$

$\frac{405}{3} = 3^t$

$3^t = 81$

$3^t = 3^4$

$t = 4$

Resposta: letra b

6) Um capital de R$ 1000,00 foi aplicado na caderneta de poupança à taxa de juro composto de 10% ao ano. Determine:

a) A equação exponencial que expressa o montante acumulado em função do tempo t;

Resolução:

Chamamos de Montante (M) o capital acumulado a um determinado tempo t ,i a taxa de juro e C o capital aplicado.

$M_0 = C$

Supondo que um capital foi aplicado ao ano, no primeiro ano de aplicação, t = 1, o montante fica:

$M_1 = C + C . i$

$M_1 =C .(1 + i)$

No segundo ano, temos t = 2, isto porque o capital foi aplicado ano a ano.

Nessas condições, o Montante no segundo ano será:

$M_2 = M_1 + M_1 . i$

$M_2 = M_1. (1 + i).$

Como $M_1 = C . (1+i)$ vem:

$M_2 = C . (1+i). (1 + i).$

$M_2 = C . (1 + i)^2$

No terceiro ano, temo t = 3.

$M_3 = M_2 + M_2 . i$

$M_3 = M_2 . (1 + i)$

Como $M_2 = C . (1 + i)^2$, vem:

$M_3 = C . (1 + i)^2 . (1 + i)$

$M_3 = C . (1 + i)^3$

Portanto, o Montante (M) Aplicado em um determinado tempo t será:

$\mathbf{M_t = C .(1 + i)^t}$

Onde, i é a taxa de juro e C o capital aplicado.

b) O montante depois de 4 anos;

$M_4 = C\ (1 + i)^4$

$M_4 = 1000(1 + 0{,}1)^4$

$M_4 = 1000.(1{,}1)^4$

$M_4 = 1464{,}1$

c) O tempo em que essa aplicação acumulará um montante de R$ 1210,00.

Resolução

$M_t = 1000\ (1 + i)^t$

$1210 = 1000(1 + 0{,}1)^t$

$\frac{1210}{1000} = (1{,}1)^t$

$1{,}21 = (1{,}1)^t$

$(1{,}1)^2 = 1{,}21$

Lembrete:
$\frac{121}{100} = 1{,}21$
$\sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{11}{10} = 1{,}1$. Logo $(1{,}1)^2 = 1{,}21$

Desta forma temos:

$(1{,}1)^2 = (1{,}1)^t$

Resposta: t = 2

7) Sob certas condições, o número de bactérias B de uma cultura, em função do tempo t, medido em horas, é dado por $B(t) = 2^{\frac{t}{12}}$. Isso significa que 5 dias após a hora zero, o número de bactérias é:

a) 1024 b) 1120 c) 512 d) 20

Resolução:

Como $B_{(5d)} = 2^{\frac{5d}{12}}$.

Como o dia tem 24 horas, temos:

$B_{(5d)} = 2^{\frac{5.24}{12}} = 2^{10} = 1024$

Resposta: letra a

8) O volume de água que fica dentro de uma banheira, depois que o ralo é aberto, pode ser obtido pela equação $V = 1350.\left(\frac{2}{3}\right)^t$, onde 1350 é o volume inicial em litros e t o tempo medido em minutos. Depois de quanto tempo haverá somente 600 litros de água na banheira.

Resolução:

$V = 1350.\left(\frac{2}{3}\right)^t$

$600 = 1350.\left(\frac{2}{3}\right)^t$

$$\frac{600}{1350} = \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

$$\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

t = 2

Resposta: t = 2

9) A produção inicial de tratores de uma certa fábrica, era de 200 unidades. Contudo, a produção passou a dobra a cada 5 anos. Determine:

a) Quantas unidades terão sido produzidas em 10 anos?

b) Quantos anos terão se passado quando a produção atingir 3200 unidades por ano?

c) Qual é a equação matemática que relaciona a produção P com o tempo t, em anos?

Resolução

Considerando os quatros primeiros intervalos como A_0, A_1, A_2 e A_4, temos:

$A_0 = 200$

$A_1 = 400 = 200.\ 2^1$

$A_2 = 800 = 200.\ 2^2$

$A_3 = 1600 = 200.\ 2^3$

Notamos que

$A_1 = 400 = 200.\ 2^1$

$A_2 = 800 = 200.\ 2^2$

$A_3 = 1600 = 200.\ 2^3$

Portanto, $A_n = 200.2^n$

Onde n é o intervalo de 5 em 5 anos.

Resolução (a)

Quantas unidades terão sido produzidas após 10 anos?

Como são 10 anos, temos dois intervalos, portanto, n = 2

$A_2 = 200.\ 2^2$

$A_2 = 200.\ 4 = 800$

$A_2 = 800$

Resposta:1600

Resolução (b)

Quantos anos terão se passado quando a produção atingir 3200 unidades por ano?

$3200 = 200.2^n$

$\frac{3200}{200} = 2^n$

$16 = 2^n$

$2^4 = 2^n$

$n = 4$

$t = 5.n$

$t = 20$

20 anos.

Resposta: 20 anos

10) Uma floresta vem sofrendo um desmatamento anual que pode ser expresso pela expressão

A $=2.\,10^6(0,5)^t$, sendo A a área, em metros quadrados, e t, o número de anos decorridos desde o início do desmatamento. Com base nessas informações, responda:

a) Qual é a área inicial da floresta?

Resolução

Para área inicial, temo $t = 0$

$A_0 = 2.\,10^6(0,5)^0$

$\mathbf{A_0 = 2.\,10^6}$

b) Quanto restará de área da floresta depois de transcorrido 1 ano?

$t = 1$

$A_1 = 2.\,10^6.\,(0,5)^1$

$A_1 = 2.\,10^6.\,(\frac{1}{2})$

$\mathbf{A_1 = 10^6}$

c) Depois de quanto tempo. Aproximadamente, a floresta terá sua área inicial reduzida à oitava parte?

$\frac{1}{8}.\,A_0 = A_0.\,(0,5)^t$

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Resposta: t = 3 anos

11) Numa certa cultura há 200 bactérias num determinado instante. Após 15 minutos, existem 400. Quantas bactérias existirão em 2 h , sabendo que elas aumentam segundo a fórmula $P = P_0 . e^{kt}$, em que P é o número de bactérias, t é o tempo em horas e k é uma constante?

Resolução

$P = 200. e^{kt}$

Para um determinado tempo igual a 15 minutos = $\frac{1}{4} h$

$400 = 200. e^{k.\frac{1}{4}}$

$$\frac{400}{200} = e^{\frac{k}{4}}$$

$2 = e^{\frac{k}{4}}$

$2^4 = \left(e^{\frac{k}{4}}\right)^4$

$2^4 = e^{\frac{4k}{4}}$

$e^k = 2^4$

$P = 200 .e^{kt}$

O número de bactérias em 2 hora será:

$P = 200 .e^{k.2}$

$P = 200 .\left(e^{k}\right)^2$

Como $e^k = 2^4$, então:

$P = 200 .(2^4)^2$

$P = 200. 2^8$

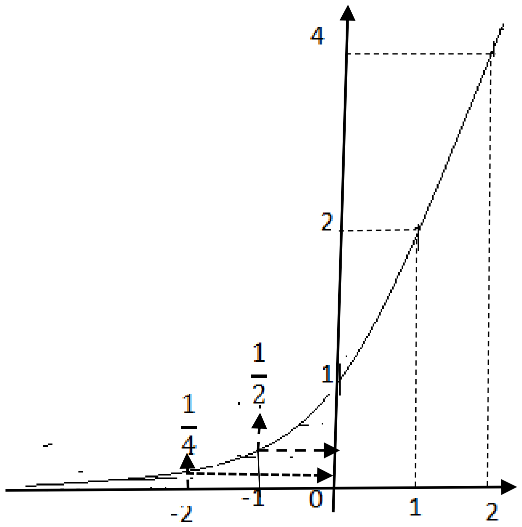
P = 200. 256

P = 51200

Resposta: 51200 bactérias

12 – Construa o gráfico das funções exponenciais definidas abaixo e classifique-as em crescente ou decrescente:

a) $f(x) = 2^x$



x	2^x
0	1
1	2
2	4
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$

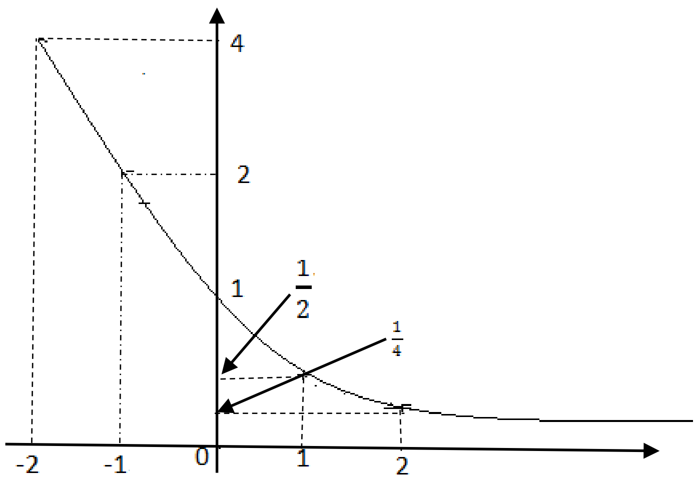
Observações:

A função não intercepta o eixo horizontal. A função intercepta o eixo y no ponto x = 0 e y = 1

Os valores da ordenada y são sempre positivos, desta forma o conjunto imagem vai ser o conjunto dos números reais positivos com a ausência do zero. **Como a base é maior que zero, a função é crescente**.

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Observações:



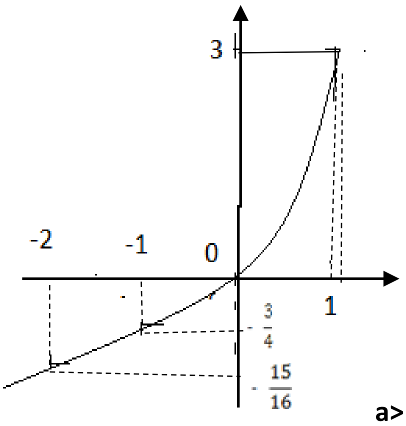
x	$(\frac{1}{2})^x$
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
-1	2
-2	4

$f(x) = a^x$, na função dada $a = \frac{1}{2}$

Portanto temos $0 < a < 1$.Quando isso acontece a função é decrescente.

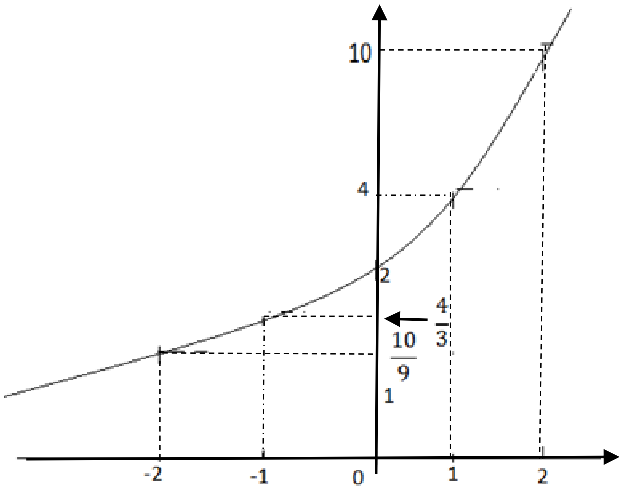
c) $f(x) = 4^x - 1$

x	$4^x - 1$
0	0
1	3
-1	$-\frac{3}{4}$
-2	$-\frac{15}{16}$



a> 0 função crescente

d) $f(x) = 3^x + 1$



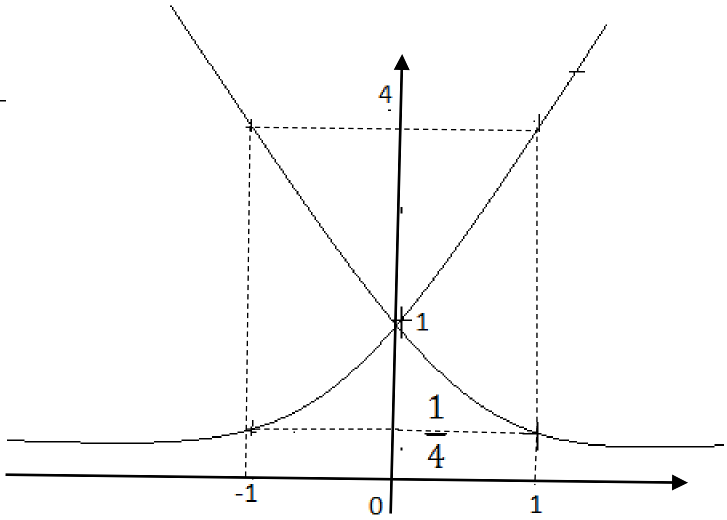
x	$3^x + 1$
0	2
1	4
2	10
-1	$\frac{4}{3}$
-2	$\frac{10}{9}$

Como a > 0, dizemos que essa função é crescente

13) Construa, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções e f (x) = 4^x e f(x) = $(\frac{1}{4})^x$.

x	4^x
0	1
1	4
-1	$\frac{1}{4}$

x	$(\frac{1}{4})^x$
0	1
1	$\frac{1}{4}$
-1	4



Meia-vida de elementos radioativos

1) Um elemento químico radioativo possui hoje 2048 g de massa. Sabendo que seu período de meia-vida é de 6 meses, que massa ele terá no daqui a 4 anos?

Resolução

Sendo M = $M_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{p}}$

Onde M é a massa final

M_0 é a massa inicial

t é o tempo

P é a meia vida

Temos:

M = ?

M_0 = 2048

P = 6 meses

t = 4 anos

Como a meia vida está dada em meses, t = 48 meses.

M = $2048.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{48}{6}}$

M = $2048.\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$

M = $2048 .\frac{1}{2^8}$

M = $\frac{2^{11}}{2^8}$ = 2^3

M = 8g

2) O césio-137 possui meia-vida de 30 anos. Se tivermos 12 g desse elemento, após quanto tempo essa massa será reduzida para 0,75 g?

Resolução:

M = 0,75g

M_0 = 12g

P = 30

0,75 = 12. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$

$\frac{75}{100}$ = 12. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$

$$\frac{75}{100.12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$$\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$ = $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$

$$\frac{t}{30} = 4$$

t = 120

Resposta: 120 anos

3 - O criptônio-89 possui o tempo de meia-vida igual a 3,16 minutos. Dispondo-se de uma amostra contendo 4,0 . 10^{23} átomos desse isótopo, ao fim de quanto tempo restarão 1,0 .10^{23} átomos?

Resolução:

M = 1,0 10.^{23}

M_0 = 4,0 . 10^{23}

P = 3,16 minutos = 196 segundos

1,0 10^{23} = 4,0 . 10^{23}. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{196}}$

$$\frac{10^{23}}{4.10^{23}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{196}}$$

$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{196}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{196}}$

$2 = \frac{t}{196}$

T = 392 seg.= 6,32 min

Resposta: 6,32min

4) Após 12 dias, uma substância radioativa tem a sua atividade reduzida para $\frac{1}{8}$da inicial. Qual a meia-vida dessa substância?

Resolução:

M = $M_0 \frac{1}{8}$

M = $\frac{M_0}{8}$

t = 12

P = ?

$\frac{M_0}{8}$ = M0. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{p}}$

$$\frac{M_0}{8\ \mathrm{M0}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{p}}$$

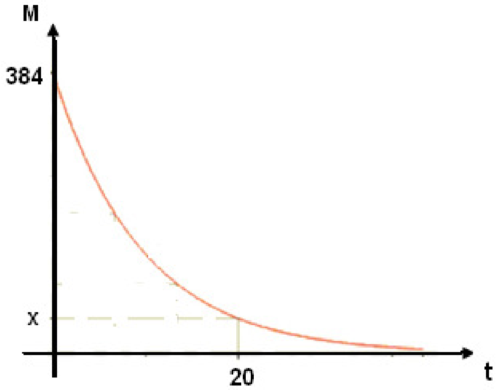
$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{p}}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{p}}$

$3 = \frac{12}{p}$

p = 4

5) Uma certa substância se decompõe aproximadamente segundo o gráfico abaixo, onde t indica o tempo em anos e M indica a quantidade de substância, em gramas, no instante t. Sabendo que o período de meia- vida dessa substância é 4 anos, determine a quantidade de substancia x.



Resolução:

M = x

M_0 = 384

T = 20

P = 4

$x = 384.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20}{4}}$

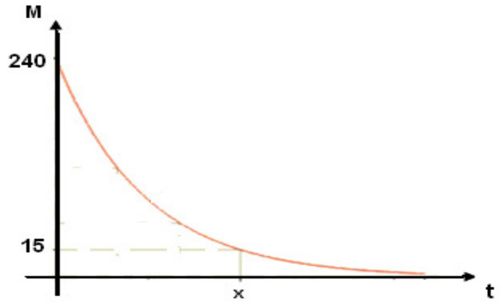
X = $384.\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$

X = $384.\frac{1}{32}$

X = $\frac{384}{32}$

X = 12

6) Uma certa substância se decompõe aproximadamente segundo o gráfico abaixo, onde t indica o tempo em anos e M indica a quantidade de substância, em gramas, no instante t. Sabendo que o período de meia- vida dessa substância é 3 anos, determine o tempo x.



Resolução:

De acordo com o gráfico, temos:

M = 15

$M_0 = 240$

P = 3

t = x

$$15 = 240.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$$

$$\frac{15}{240} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$$

$$\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$$

$$4 = \frac{x}{3}$$

X = 12