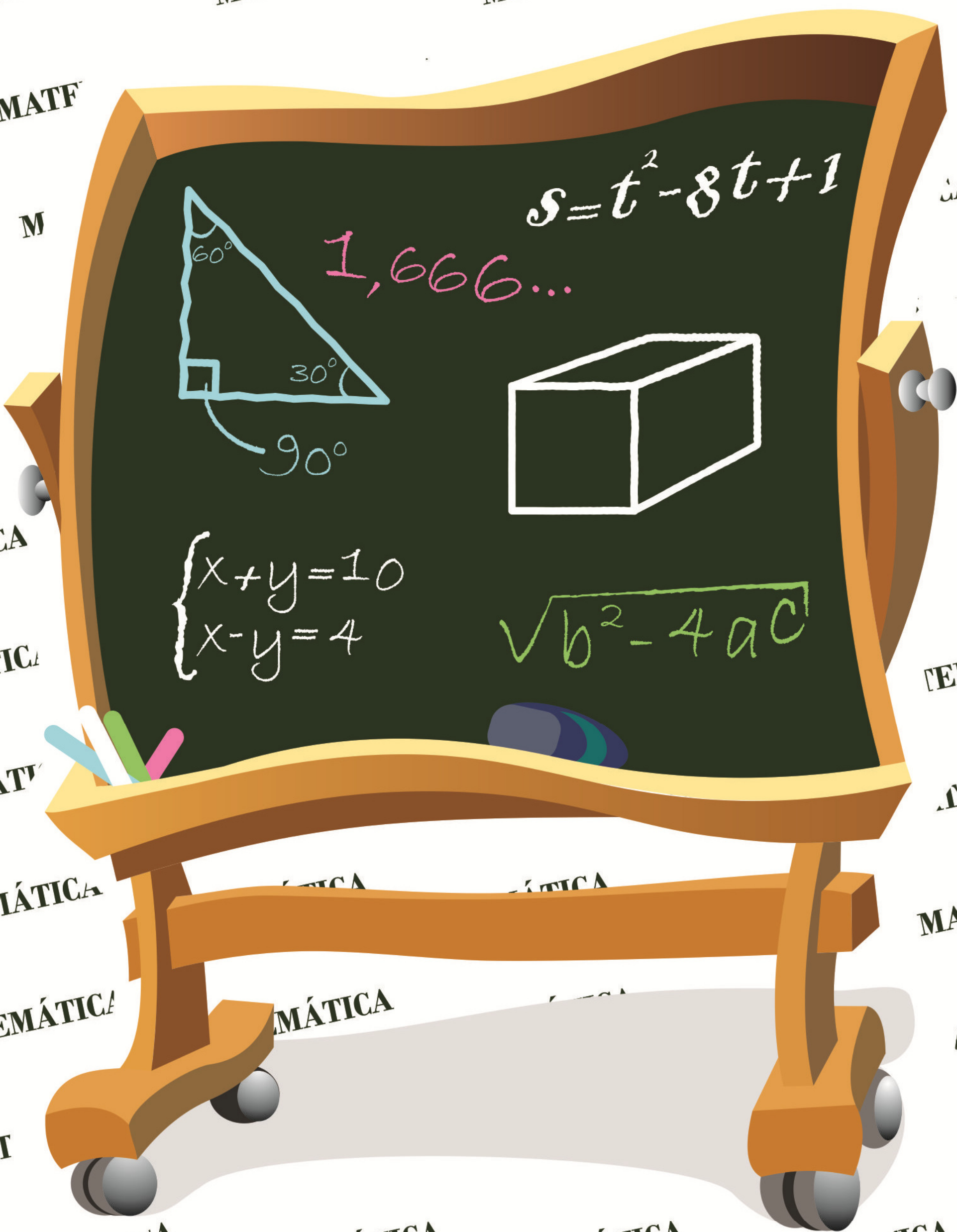
MATEMÁTICA



FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

ETEVM
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

GOVERNO DO Rio de Janeiro

1º ANO

1ª etapa

FUNÇÕES DO 1º GRAU

COORDENAÇÃO

SERGIO LOPES RODRIGUES

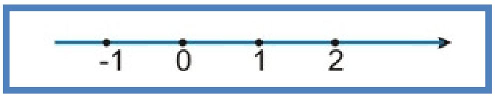
Intervalos Reais

Iniciaremos o estudo de intervalos, lembrando o que é conjunto dos números reais.

Dizemos que todos os números naturais, inteiros, racionais e irracionais formam o conjunto dos números reais(ℝ).

Em ℝ, podemos estabelecer outros subconjuntos denominados **intervalos.**

Podemos representar geometricamente o conjunto dos **números reais** associando cada número x ∈ ℝ a um ponto de uma reta r.

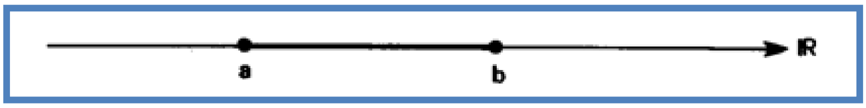


Considerando **a** e **b** números reais com a < b, temos:

Intervalo limitado

- **Intervalo fechado:** é o intervalo formado por números reais maiores ou iguais a **a** e menores ou iguais a **b**.

Representação geométrica.



Representação : Intervalo: [a, b]

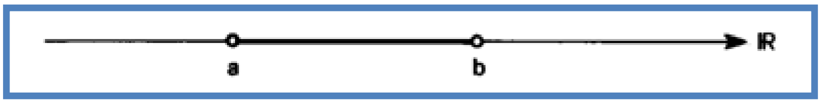
Conjunto: {x ∈ ℝ | a ≤ x ≤ b}

Exemplo:

[2, 5] ou { x ∈ ℝ | 2 ≤ x ≤5}

- **Intervalo aberto:** é o intervalo formado por números reais maiores do que **a** e menores do que **b**.

Representação geométrica.



Representação: Intervalo:]a, b[

Conjunto: {x ∈ ℝ | a < x < b}

Exemplo:

] 3, 7[ou { x ∈ ℝ | 3 < x < 7}

- **Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita**: é o intervalo formado por números reais maiores ou iguais a **a** e menores do que **b**.

Representação: Intervalo: [a, b[

Conjunto: {x ∈ ℝ| a ≤ x < b}

Exemplo:

[- 4, 1[ou {x ∈ ℝ| - 4≤ x < 1}

- **Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita:** é o intervalo formado por números reais maiores do que **a** e menores ou iguais a **b**.

Representação: Intervalo:]a, b]

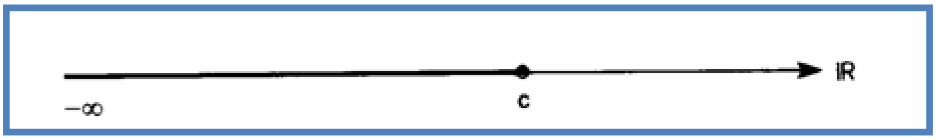
Conjunto: $\{x \in \mathbb{R} | \ a < x \leq b\}$

Exemplo:

]- 6, - 2] ou $\{x \in \mathbb{R} | -6 < x \leq -2\}$

Intervalos infinitos

- intervalo formado por números reais menores ou iguais a **c**.



Representação: Intervalo:] $-\infty$,c]

Conjunto: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq c\}$

Exemplo:

] $-\infty$, 3] ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$

- intervalo formado por números reais menores que **c**.

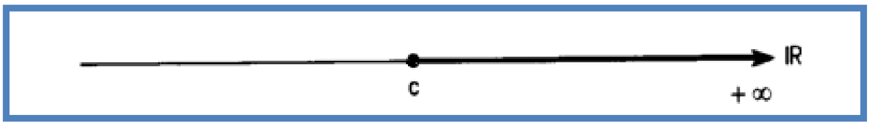
Representação: Intervalo:] $-\infty$, c [

Conjunto: { x ∈ ℝ | x < c }

Exemplo:

] $-\infty$,, 4 [ou {x ∈ ℝ| x < 4}

- intervalo formado por números reais maiores ou iguais a **c**.



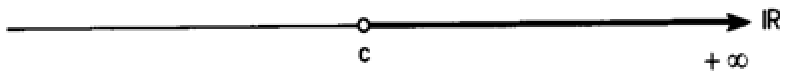
Representação: Intervalo: [c,+∞ [

Conjunto: {x ∈ ℝ | x ≥ c}

Exemplo:

[- 5, +∞] ou {x ∈ ℝ| x ≥ - 5}

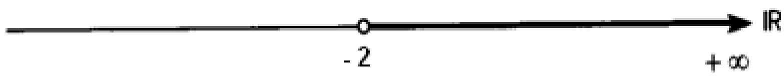
- intervalo formado por números reais maiores que **c.**



Representação: Intervalo:]c, +∞ [

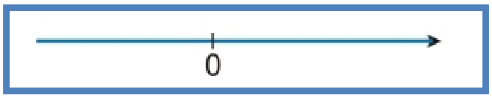
Conjunto: {x ∈ ℝ | x > c}

Exemplo:



]-2, ,+∞] ou {x ∈ ℝ| x > - 2}

- **Reta real:** formada por todos os números reais.



Representação: Intervalo] −∞ ,+∞ [

Conjunto: ℝ

FUNÇÃO

Introdução

O estudo de funções é um dos mais importantes da matemática, onde se preocupa estabelecer uma relação entre duas grandezas variáveis, sendo aplicado também a diversas ciências.

Ao lermos um jornal ou uma revista, diariamente nos deparamos com ilustrações de gráficos e tabelas. Estes são instrumentos muito utilizados nos meios de comunicação. Um texto com ilustrações de gráficos e tabelas é muito mais interessante, chamativo, agradável, e de fácil compreensão. Os gráficos estão presentes na evolução da taxa de juros, no crescimento populacional, nos exames laboratoriais, nas informações de composição química de cosméticos, enfim em várias situações. Ao interpretarmos estes gráficos, verificamos a necessidade dos conceitos de **plano cartesiano**.

Ao relacionarmos velocidade em função do tempo, o lucro de uma empresa em função do número de produtos vendidos ou a intensidade da fotossíntese realizada por uma planta em função da intensidade de luz a que ela é exposta, percebemos quanto são importantes os conceitos de **funções** para compreendermos as relações entre os fenômenos físicos, biológicos, sociais, econômicos e etc.

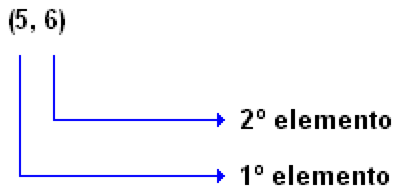
Observamos então que as aplicações de plano cartesiano, relações e funções estão presentes no nosso cotidiano.

Acesso em **25/07/2011 – G1.globo.com/notícias/economia**

Pares ordenados

Dado dois elementos **x** e **y** de um conjunto e estabelecido entre eles uma determinada disposição (ou ordem), isto é, **x** sendo o primeiro e **y** o segundo elemento, formamos o par ordenado (**x,y**).

Exemplos:



Assim:

Indicamos por (*x*, *y*) o par ordenado formado pelos elementos *x* e *y*, onde *x* é o 1º elemento e *y* é o 2º elemento.

Observações

De um modo geral, sendo *x* e *y* dois números racionais quaisquer, temos:
$(x, y) \neq (y, x)$.

Exemplo:

$$(1, 3) \neq (3, 1)$$

Dois pares ordenados (x, y) e (t, u) são iguais somente se $x = t$ e $y = u$.

Representação gráfica de um Par Ordenado

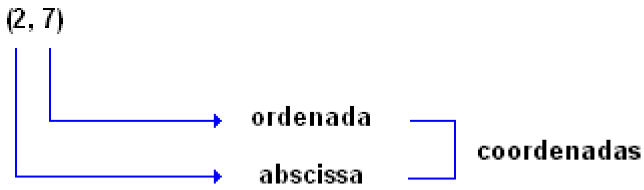
Podemos representar um par ordenado através de um ponto num plano. Esse ponto é chamado de **imagem** do par ordenado.

Coordenadas Cartesianas

Os números do par ordenados são chamados **coordenadas cartesianas.**
Exemplos:

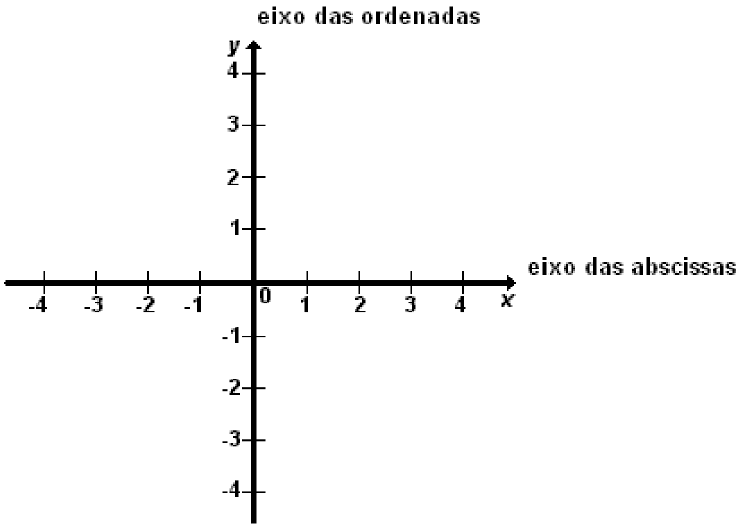
A (2, 7) ==> 2 e 7 são as coordenadas do ponto *A*.

Denominamos de **abscissa** o 1º número do par ordenado, e **ordenada**, o 2º número desse par. Assim:



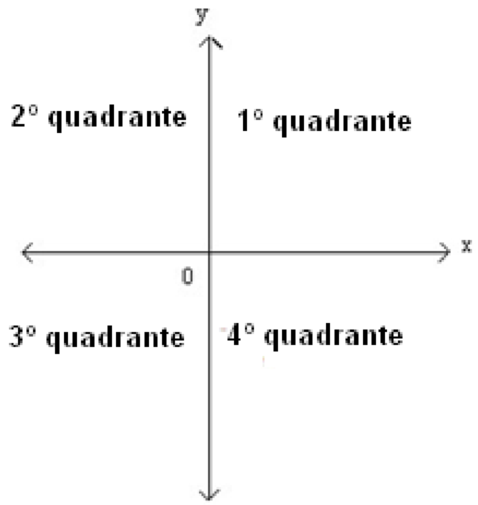
Plano Cartesiano

Agora vamos representar um par ordenado num plano cartesiano. Esse plano é formado por duas retas, *x* e *y* perpendiculares entre si. A reta horizontal é o **eixo das abscissas** (**eixo *x***). A reta vertical é o **eixo das ordenadas** (**eixo *y***). O ponto comum dessas duas retas é denominado **origem**, que corresponde ao par ordenado (**0, 0**).



Quadrantes

Os eixos são divididos em quatro ângulos retos chamados quadrantes enumerados no sentido **anti-horário.** No 1º quadrante, as abscissas e as ordenadas são positivas, no 2º quadrante, as abscissas são negativas e as ordenadas positivas, no 3º quadrante, ambas são negativas e finalmente no 4º quadrante as abscissas são positivas e as ordenadas negativas.



Localização de um Ponto

Para localizar um ponto num plano cartesiano, utilizamos a seqüência prática:

- Primeiro número do par ordenado deve ser localizado no eixo das abscissas (x).
- Segundo número do par ordenado deve ser localizado no eixo das ordenadas (y).

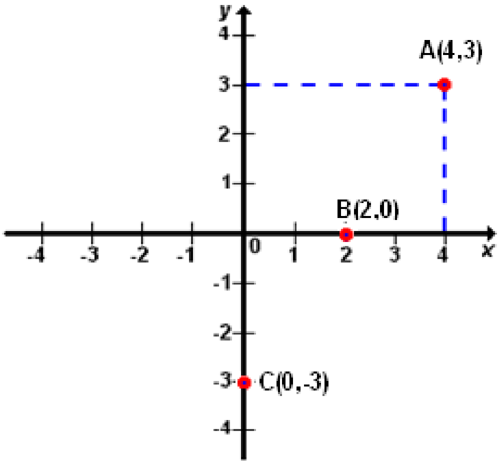
No encontro das perpendiculares aos eixos *x* e *y*, por esses pontos, determinamos o ponto procurado.

Observação:

Se $x = 0$, o ponto encontra-se no eixo y. Se $y = 0$, o ponto encontra-se no eixo x.

Exemplo:

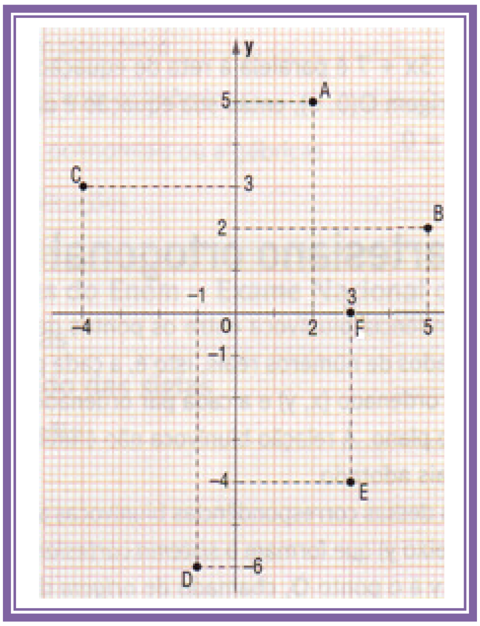
Localizando os pontos A(4, 3), B(2, 0) e C(0, -3).



Exercícios

1) Observe a figura ao lado e determine as coordenadas dos pontos:

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E
f) F



2) Marque num plano cartesiano os seguintes pontos:

a) A(1,-2)   b) D (0, 3)   c) Q(3, -2)

d) B (-3, 3)   e) P(-1, -5)   f) N(0, -4)

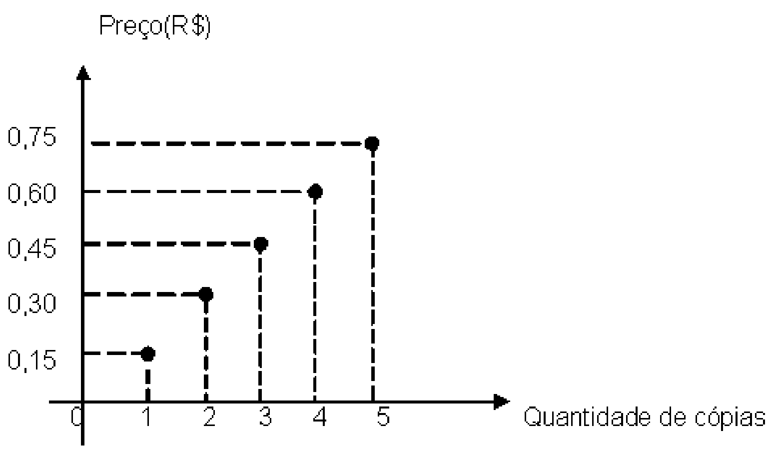
g) C(4, 4)   h) M (-4, 0)   i) R(3, 0)

Conceito de Função

Antes de formularmos o conceito de função, é interessante que você observe que ele está presente em nosso dia-a-dia. É comum encontrarmos no comércio, como em copiadoras, por exemplo, tabelas relacionando quantidades e os preços a serem cobrados.

Quantidade de cópias	Preço(R$)
1	0,15
2	0,30
3	0,45
4	0,60
5	0,75
6	0,90

Podemos também representar graficamente esses valores.



Veja que na tabela acima existe uma correspondência entre a quantidade de cópias e o preço. Conhecido o preço de uma cópia, podemos calcular 10, 100, 200 ou qualquer outra quantidade:

Quantidade de Cópias	Preço(R$)
10	10 x 0,15 = 1,50
100	100 x 0,15 = 15,00
200	200 x 0,15 = 30,00

Se quisermos saber o preço de **n** cópias, devemos proceder da mesma forma para encontrar 10, 100 e 200, ou seja, multiplicamos **n** por 0,15.

Indicando o preço pela letra **P**, temos:

P = 0,15 . n

Note que para cada valor de **n** se associa um único valor de **P**. Por isso dizemos que o preço P é dado em **função de n**. Simbolicamente representamos assim:

P = f(n) => (lê-se : P é igual a f de n, ou P é função de n).

A fórmula matemática **P = 0,15 . n** é chamada lei de associação ou lei de formação da função.

Através lei de formação da função, podemos determinar também o número de cópias a partir de um valor cobrado. Como por exemplo, se o valor cobrado foi de R$ 3,60, o número de cópias será:

P = 0,15 . n => 3,60 = 0,15 **.** n => 0,15 **.** n = 3,60 => $n = \frac{3,60}{0,15}$ => n = 24

Portanto, foram 24 cópias.

Tipos particulares de funções

FUNÇÃO DO 1º GRAU

Veja a seguinte situação:

O salário mensal de Fernanda é composto por duas partes: uma fixa, no valor de R$ 600,00 e outra variável, que corresponde a uma comissão de 5% sobre o valor total de suas vendas durante o mês. Qual será a lei que representa o salário de Fernanda em função do valor total de vendas.

Lembrete: $5\% = \frac{5}{100} = 0,05$

Vamos representar por **x** o valor de vendas mensal e por **y** o salário mensal de Fernanda, podemos expressar y em função de x pela lei: y = 0,05x + 600.

Funções desse tipo são chamadas do1º grau. Vejamos sua definição:

Chama-se **função do 1º grau**, a qualquer função dada por uma lei da forma **f(*x*) = a*x* + b ou y = ax + b**, onde a e b são números reais e a $\neq$ 0.

Na função f(*x*) = a*x* + b, o número **a** é chamado de coeficiente de ***x*** e o número **b** é chamado termo independente ou termo constante.

Exemplos :

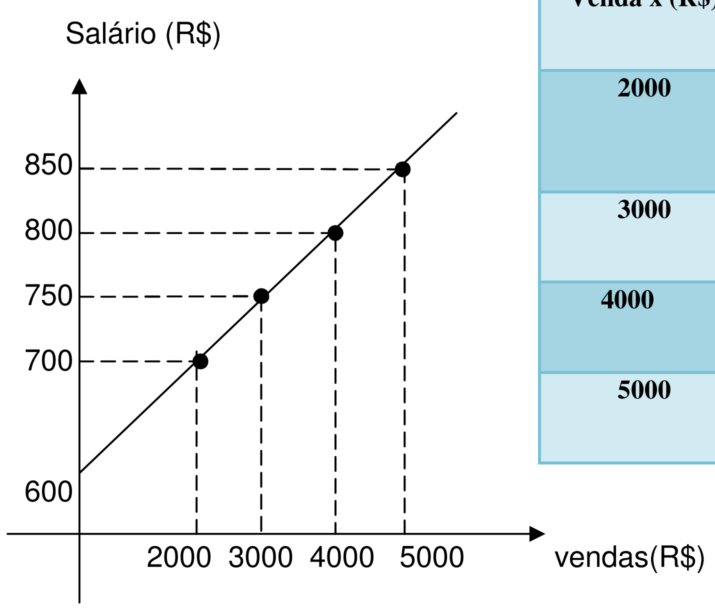
a) f(x) = - 2x + 1 (a = -2 ; b = 1)

b) f(x) = x + 13 (a = 1; b = 13)

c) f(x) = 5x (a = 5; b = 0).

Agora vamos fazer o gráfico da situação apresentada.

Para desenhá-lo escolhemos alguns valores de venda x e calculamos os valores de salário correspondentes y.



Venda x (R$)	Salário y (R$) y = 0,05.x + 600	(x,y)
2000	y = 0,05 . 2000 + 600 y = 700	(2000,700)
3000	y = 0,05 . 3000 + 600 y = 750	(3000,750)
4000	y = 0,05 . 4000 + 600 y = 800	(4000,800)
5000	y = 0,05 . 5000 + 600 y = 850	(5000,850)

Propriedades da função do 1º grau

1. Na função **f(x) = ax + b**, se **b ≠ 0** a **função é afim**, e se **b = 0** a **função é linear** .

Exemplos:

A função y = 2x + 5 é afim

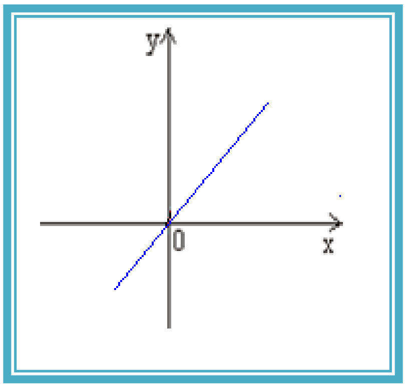
A função y = 3x é linear

2. O **gráfico** de uma função do 1º grau é sempre uma **reta** .

3. Quando a função **é linear**, ou seja, **y = ax** , o gráfico é uma reta que **sempre** passa na **origem.**

4. Raiz ou zero da função é o valor de **x** que anula a função, isto é, torna **f(x) = 0.**

Exemplo:



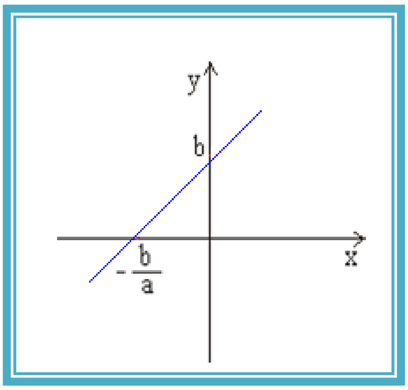
Determine a raiz da função y = 3x + 12.

f(x) = 0 ou y = 0

3x + 12 = 0 => 3x = -12 => x = $\frac{-12}{3}$ => x = - 4

Portanto, a raiz da função é - 4.

5. O gráfico intercepta o eixo dos **x** na raiz da função e, portanto, no ponto de (-$\frac{b}{a}$**,** 0). O gráfico intercepta o eixo dos **y** no ponto **(0 , b)** , onde **b** é chamado **coeficiente linear** .

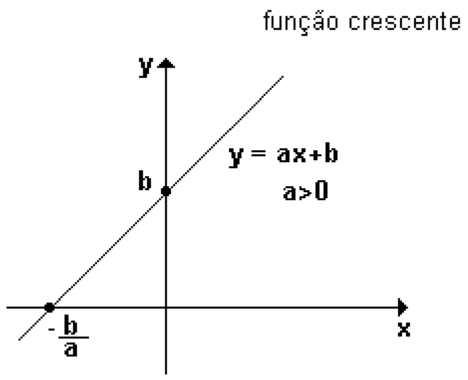


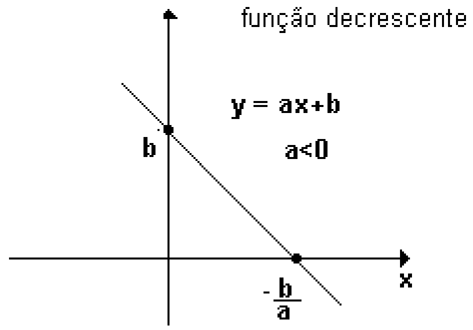
6. O valor **a** é chamado **coeficiente angular** e dá a **inclinação da reta**.

7. Uma **função é crescente** quando aumentando o valor de x, o valor de y também aumenta.

8. Uma **função é decrescente** quando aumentando o valor de x, o valor de y diminui.

Na função **f(x) = ax + b**, se **a** > **0** , então a função é **crescente** . Se **a** < **0** , então função é **decrescente** .





Exemplo:

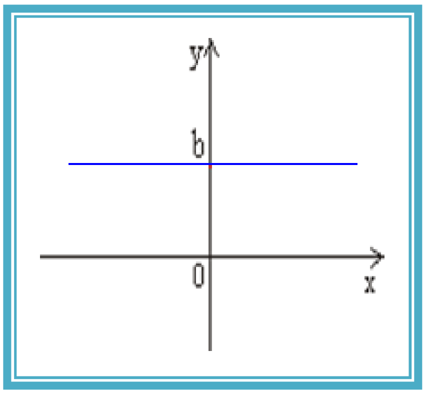
A função y = 5x – 10 é **crescente.** **a>0**

A função y = -4x + 9 é **decrescente.** **a < 0**

Observação 1

Se na função f(x) = ax + b temos a = 0, a função resulta em f(x) = b. Neste caso a função recebe o nome de **função constante**. O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo dos x.

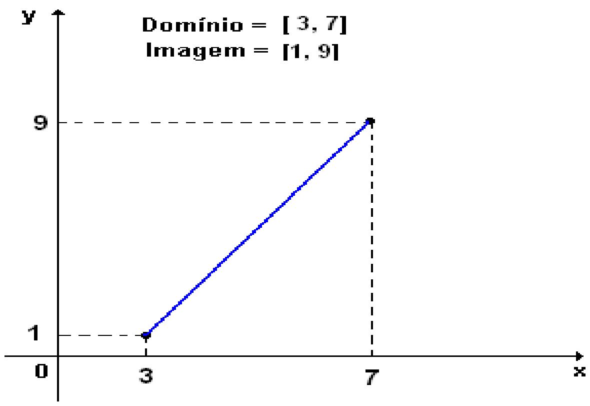
A função y = 7 é constante, isso quer dizer que para todo valor de x, y será igual a 7.



Observação 2

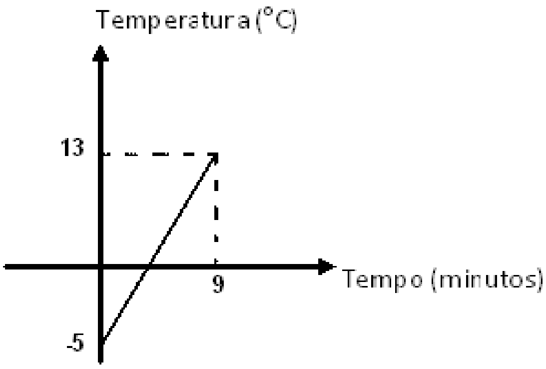
Numa função, os possíveis valores de x são chamados **domínio da função** e os possíveis valores de y são chamados **imagem d*a* função.**

No gráfico abaixo, temos:



Exercícios resolvidos

1) Uma barra de ferro com temperatura inicial de – 5 °C foi aquecida até 13 °C. O gráfico abaixo representa a variação da temperatura da barra em função do tempo gasto nessa experiência.Calcule em quanto tempo , após o início da experiência, a temperatura da barra atingiu 1°C.



SOLUÇÃO:

Devemos primeiramente achar a função relativa ao problema.

y = ax + b => x = tempo => y = temperatura

No gráfico podemos observar os pares ordenados (9, 13) e (0, -5) ou seja, quando x = 9, y = 13 e quando x = 0, y = - 5. Então:

f(9) = 13 e f(0) = -5.

Substituindo na função y = ax + b, temos:

f(9) = 13 => 13 = 9.a + b => 9a + b = 13

f(0) = - 5 => - 5 = 0.a + b => **b = - 5**

Substituindo o valor encontrado de **b**, em 9**a** + b = 13, determinamos **a**.

9a + (-5) = 13 => 9a = 13 + 5 => 9a = 18 => **a = 2**

Substituindo **a = 2** e **b = - 5** na função y = **a**x + **b,** temos a função procurada.

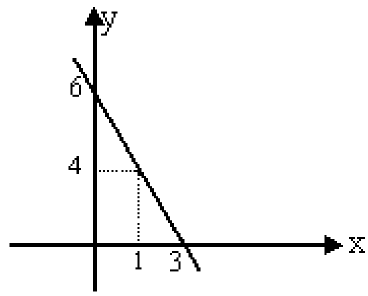
Logo, a função procurada é: y = 2x - 5.

Como o problema pede em quanto tempo , após o início da experiência, a temperatura da barra atingiu 1°C, ou seja quando y = 1, temos:

2x – 5 = 1 => 2x = 1 + 5 => 2x = 6 => x = 3

Resposta: 3 minutos

2) Observando o gráfico, determine:



a) a raiz da função;

b) o coeficiente linear, ou seja f(0)

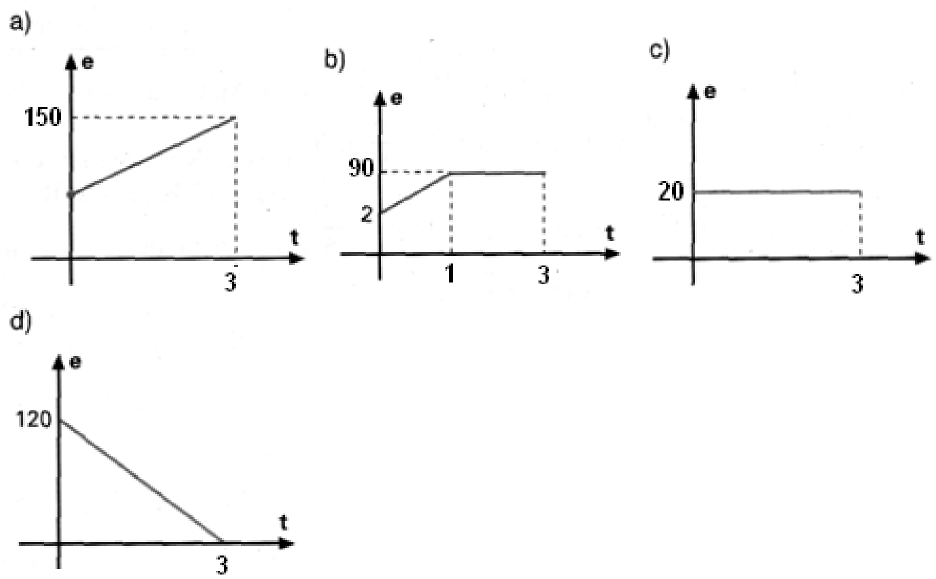
SOLUÇÃO:

a) Para obter a raiz da função é só verificar onde a reta corta o eixo x, portanto x = 3.

b) Para obter f(0) é só verificar onde a reta corta o eixo y, portanto y = 6.

Exercícios

1) Os gráficos dos itens abaixo relacionam o espaço (**e**, em quilômetros) e o tempo (**t**, em horas). Qual desses gráficos melhor representa um veículo que ficou parado na estrada por 3 horas?



2) Determine a raiz da função y = 5x - 40.

3) Na função y = 3x – 12, determine f(10), ou seja, o valor de y para x = 10**.**

4) Dada a função f(x) = ax + 2, ache o valor de **a** para que se tenha f(4) = 22.

5) O preço a pagar por uma corrida de táxi depende da distância percorrida. A tarifa y é composta de duas partes: uma parte fixa denominada bandeirada e uma parte variável que depende do número x de quilômetros rodados. Suponha que a bandeirada esteja custando R$ 4,00 e o quilômetro rodado, R$ 0,70.

a) Expresse y em função de x.

b) Quanto se pagará por uma corrida em que o táxi rodou 11 km?

c) Se um passageiro pagou R$ 18,00, quantos quilômetros rodou?

6) O lucro de uma indústria que vende um único produto é dado pela fórmula matemática L(x) = 3x - 450, onde L representa o lucro em reais e x, a quantidade de produtos vendidos. Determine:

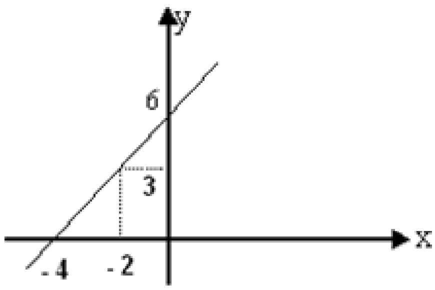
a) o lucro da indústria quando ela vende 500 produtos;

b) a quantidade de produtos que devem ser vendidos para que haja lucro de R$ 5.541,00;

c) a quantidade mínima de produtos que devem ser vendidos para que haja lucro.

7) Observando o gráfico, determine:

a) raiz da função
b) f(-2)
c) f(0)
d) a função



8) Na fabricação de peças, uma fábrica tem um custo fixo de R$ 20,00 mais um custo variável de R$ 4,00 por unidade produzida. Sendo **x** o número de peças unitárias produzidas, determine:

a) a lei da função que fornece o custo da produção de **x** peças;

b) o custo de produção de 200 peças.

9) Um corpo se desloca em velocidade constante de acordo com a função **s = 3t – 2**, em que s indica a posição do corpo (em metros) no instante t(em segundos). Construa o gráfico de **s** em função de **t**.

10) A tabela abaixo fornece a posição S(t), em km, ocupada por um veículo, em relação ao quilômetro zero da estrada em que se movimenta, durante alguns instantes t (em h).

t(h)	0	2	4	6
S(t)	60	120	180	240

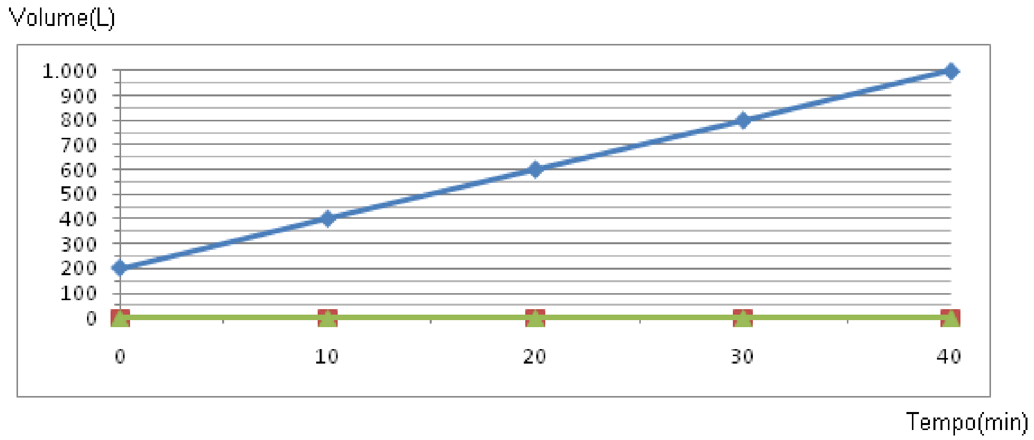
a) Faça o gráfico do movimento.

b) Qual a lei que define o movimento?

c) Qual a posição do veículo depois de 16 horas?

d) Em que instante o veículo ocupará a posição S = 420 m

11) Uma caixa d'água com capacidade para 1000 litros tem apenas 200 litros de água. Abre-se uma torneira que sai 20 litros de água por minuto e começa a encher a caixa, conforme gráfico.



a) Qual o volume de água da caixa no instante t = 30 minutos.

b) Quantos minutos são necessários para que a torneira encha totalmente a caixa?

c) Se a torneira ficar aberta durante t minutos até encher, qual a expressão que define o volume y de água na caixa?

d) Qual era o volume de água da caixa, depois que a torneira ficou aberta 15 minutos?

Bibliografia

BARROSO,Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

FACHINI, Walter. Matemática; volume único. São Paulo, Saraiva,1996.

GIOVANNI, José Rui; BONJORNO, José Roberto. Matemática. São Paulo, FTD,1992.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva,2010.

MARCONDES, Carlos Alberto ET AL. Matemática. São Paulo, Ática, 2000.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática antes e depois. São Paulo, Saraiva, 2006.

MUNOHZ, Ainda, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Sites:

http://www.somatematica.com.br

Escola 24 horas - http://www.escola 24h.com.br

http://www.matematica.com.br