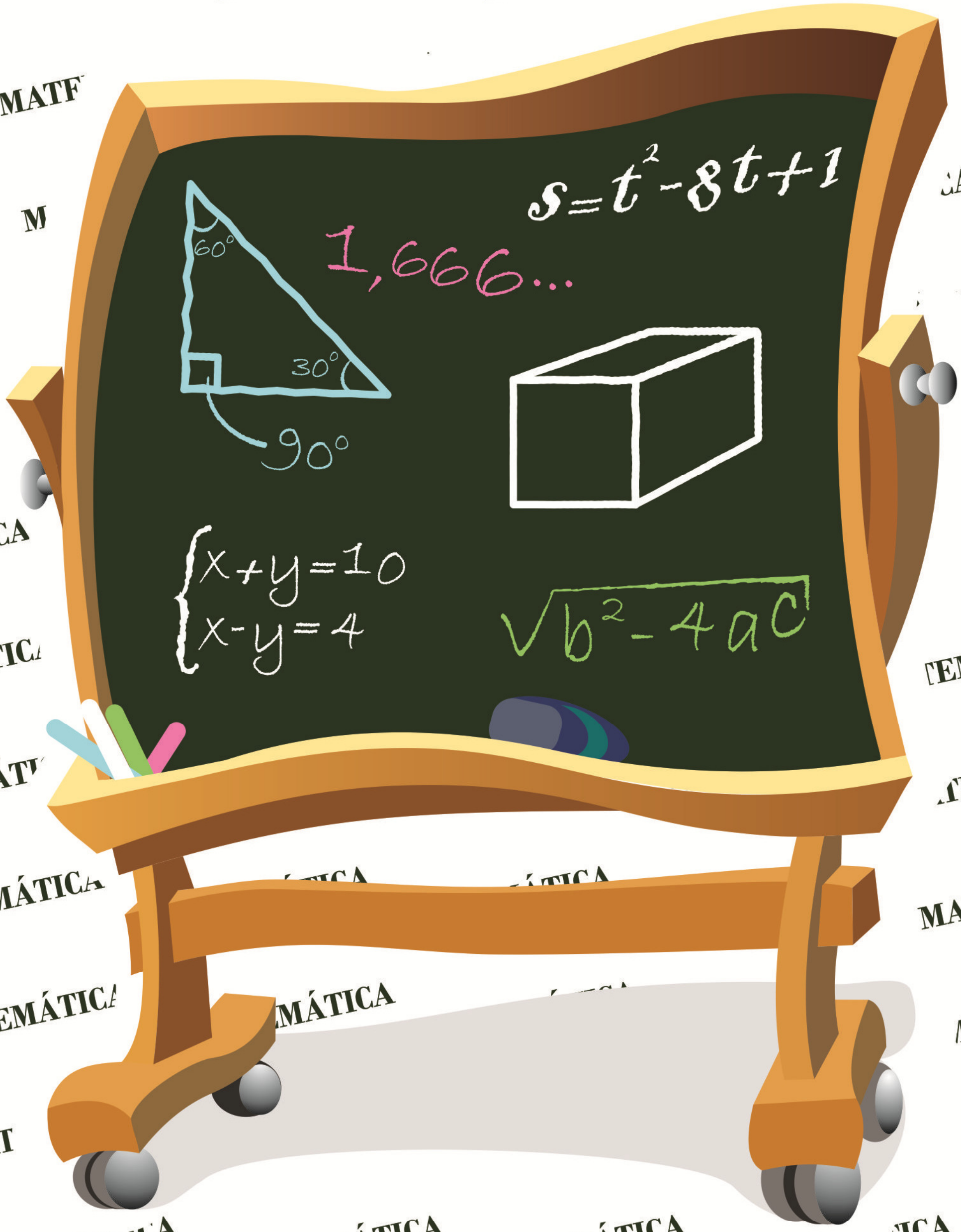
MATEMÁTICA



FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

ETEVM
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

GOVERNO DO Rio de Janeiro

3º ANO

GEOMETRIA ESPACIAL

COORDENAÇÃO

SERGIO LOPES RODRIGUES

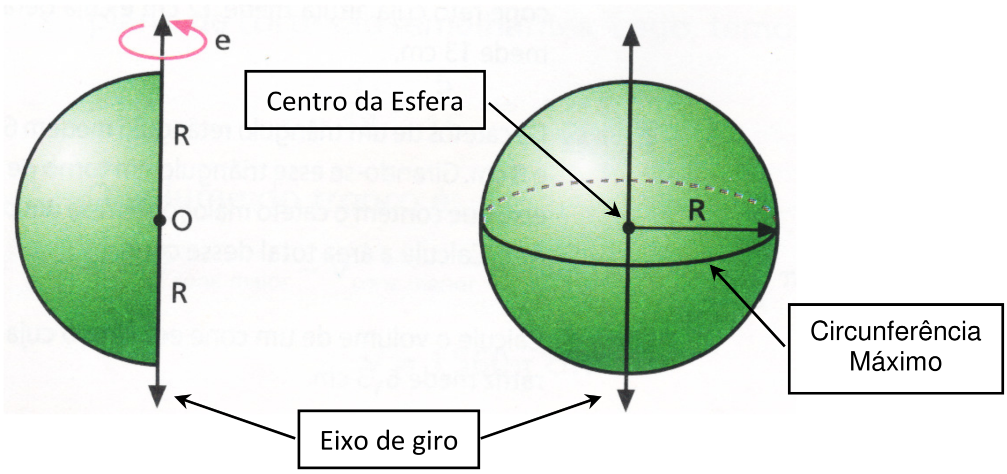
GEOMETRIA ESPACIAL

Superfície Esférica

Chama-se superfície da esfera de centro O e raio R ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja igual a R. A superfície esférica é gerada pela **rotação** completa de uma **semicircunferência** de centro O e raio R em torno de um eixo que contém o diâmetro.

Esfera

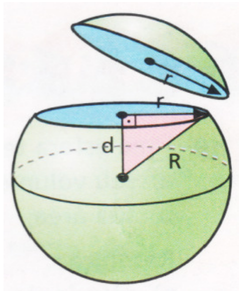
É o solido de centro O e raio R limitado por uma superfície esférica. É o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto O são menores ao iguais a R. A esfera é gerada pela rotação completa de um **semicírculo** de centro O e raio R em torno de um eixo que contem o diâmetro.



De uma forma bastante simples, podemos dizer que a superfície esférica é a "casca", enquanto a esfera é a reunião da "casca" com o "miolo".

Seção

Chama-se secção de uma esfera a interseção da esfera com um plano secante. A secção plana de uma esfera é um círculo.

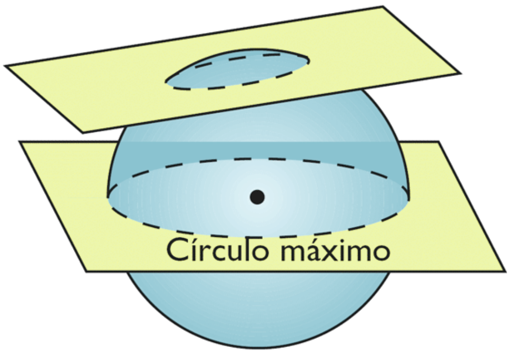


R – raio da esfera
r – raio da secção
d – distância do centro à secção

Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\boldsymbol{R^2 = d^2 + r^2}$$

Quando d = 0, ou seja, se o plano passa pelo ponto O, a secção é um circulo de raio igual ao raio da esfera, chamado **círculo máximo.**



Área da superfície esférica

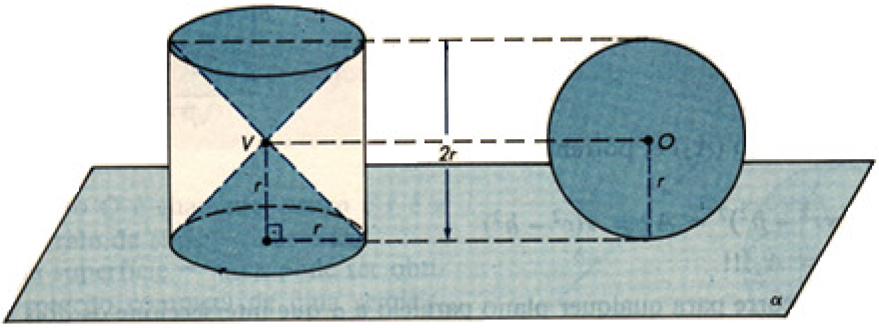
A área de uma superfície esférica de raio R é calculada pela fórmula:

$$\boldsymbol{S = 4\pi R^2}$$

Volume da esfera

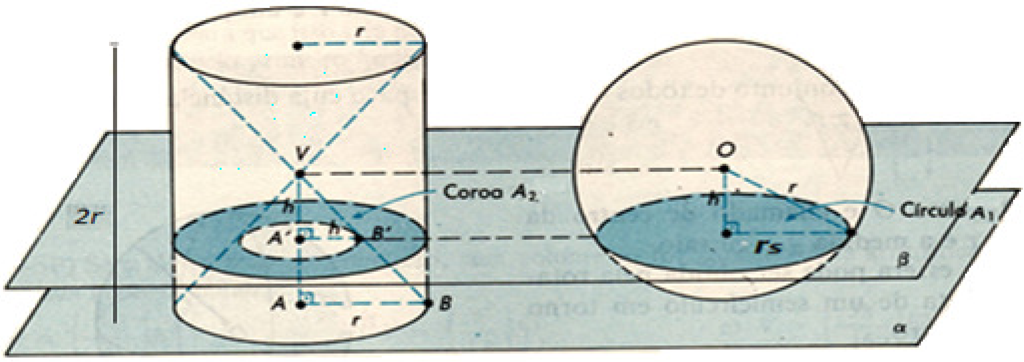
Para chegarmos a fórmula do cálculo do volume da esfera, utilizaremos um sólido auxiliar chamado **anticlepsidra e o Princípio de Cavalieri**.

Considere uma esfera de raio **r** e centro **O** apoiada sobre um plano $\boldsymbol{\alpha}$. Ainda sobre esse plano, tomemos um cilindro equilátero de raio **r** e altura **2r**. Retirando desse cilindro dois cones retos de raio **r**, altura **r** e vértice **V**, obtemos um sólido chamado **anticlepsidra**. Veja a figura.



Agora vamos provar pelo Princípio de Cavalieri que o volume da esfera é igual ao volume da anticlepsidra.

Consideramos a esfera e a anticlepsidra apoiadas no plano $\boldsymbol{\alpha}$ e seccionadas por um plano $\boldsymbol{\beta}$, paralelo a $\boldsymbol{\alpha}$, à um distância h (h> 0) do centro da anticlepsidra (ou do centro da esfera, que é o mesmo).



Observe que a área A_1 da secção determinada na esfera é dada por $\boldsymbol{A_1 = \pi r_s{}^2}$.

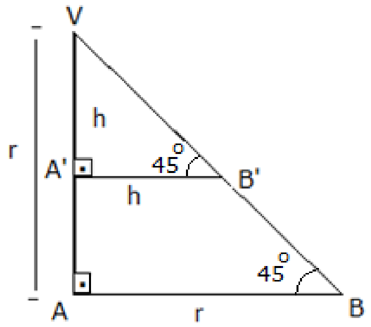
Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\boldsymbol{r^2 = h^2 + r_s{}^2 \quad \Rightarrow \quad r_s{}^2 = r^2 - h^2}$$

Assim, a área $\boldsymbol{A_1}$ pode ser expressa por:

$$A_1 = \pi(r^2 - h^2)$$

Observe também, que a área A_2 da secção obtida na anticlepsidra é dada pela área da coroa circular definida pelos círculos de raio **r e h**. Note que o raio **h** interno da coroa será sempre igual à distância entre o plano $\boldsymbol{\beta}$ e o centro da anticlepsidra, pois o triângulo retângulo $\Delta A'VB'$ será sempre isósceles para qualquer plano $\boldsymbol{\beta}$. Veja figura abaixo.



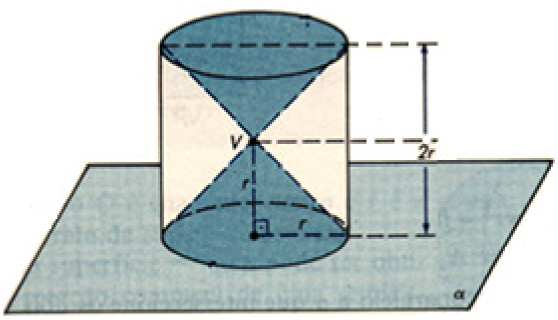
Assim, a área A_2 da coroa é:

$$A_2 = \pi r^2 - \pi h^2 \quad => \quad A_2 = \pi(r^2 - h^2)$$

Portanto, $A_1 = A_2$

A igualdade das áreas das secções permite concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume da esfera é igual ao volume da anticlepsidra.

Agora vamos calcular o volume da anticlepsidra que igual o volume da esfera.



Como vimos, o volume da anticlepsidra V_a é igual a diferença entre o volume do cilindro de raio **r** e altura **2r** e o volume dos dois cones de raio **r**, altura **r** e vértice **V**.

$$V_a = V_{cilindro} - 2V_{cone}$$

$$V_a = \pi\, r^2.2r - 2.\frac{1}{3}.\pi\, r^2.r$$

$$V_a = 2\pi\, r^3 - \frac{2}{3}.\pi\, r^3$$

$$V_a = \frac{6}{3}.\pi r^3 - \frac{2}{3}.\pi r^3$$

$$V_a = \frac{4}{3}.\pi r^3$$

Portanto, o volume da **esfera** é dado por:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}.\pi r^3}$$

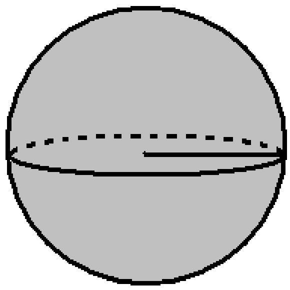
Exercícios resolvidos

1. Considerando uma esfera de raio 4 cm, determine:

   a) a área da superfície esférica

   b) o volume da esfera

Solução

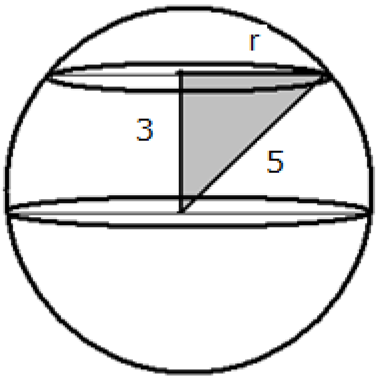


a) $A = 4\pi \cdot R^2 \Rightarrow A = 4\pi \cdot 4^2 \Rightarrow A = 64\pi\, cm^2$

b) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 \Rightarrow V = \frac{256\pi}{3} cm^3$

2. Uma esfera de 5 cm de raio é seccionada 3 cm do centro. Determine a área da secção obtida.

Solução



$R^2 = d^2 + r^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow r = 4\,cm$

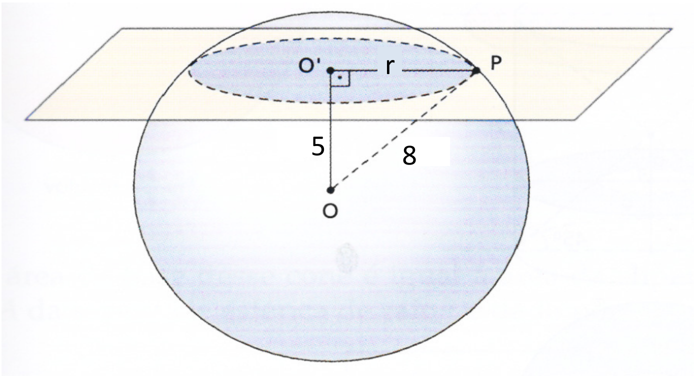
$A_{\text{secção}} = \pi \cdot r^2$

$A_{\text{secção}} = \pi \cdot 4^2$

$A_{\text{secção}} = 16\pi\, cm^2$

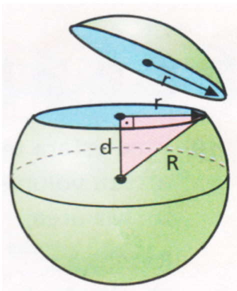
Exercícios

1. Uma esfera de raio 8 cm é seccionada por um plano distante 5 cm do seu centro. Calcule o raio da secção.



2. Calcular a área de uma superfície esférica de raio 6 cm.

3. Calcule a área da secção determinada por um plano que corta uma esfera de raio 15 cm e que está distante 9 cm do seu centro.

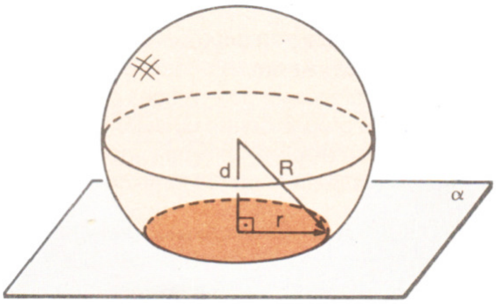


4. Determinar o volume de uma esfera de raio 18 cm.

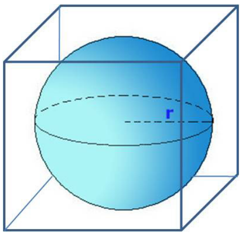
5. Determine o raio de uma esfera sabendo que seu volume mede $V = 904{,}32\,cm^3$. (usar $\pi = 3{,}14$)

6. O volume de uma esfera é $36\pi dm^3$. Quanto mede a área da sua superfície esférica?

7. A secção de um plano α com uma esfera é um círculo de área igual a $12\pi cm^2$. Achar o volume da esfera, sabendo que a distância do centro dela até α é 2 cm. Achar também a área da superfície esférica.

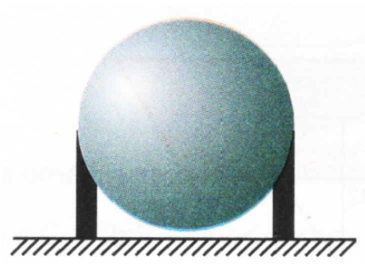


8. Considere uma esfera inscrita num cubo de área total $96dm^2$. Determine:



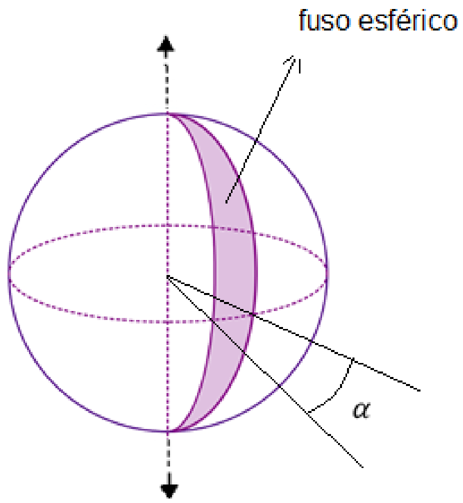
a) a medida do seu raio
b) a área de sua superfície
c) o seu volume

9. Um reservatório de forma esférica (figura abaixo) tem 9 m de raio. Para encher totalmente esse reservatório são necessárias 20 horas. Nessas condições, o reservatório recebe água na razão de quantos metros cúbicos por hora?



10. Sabemos que uma bóia (figura ao lado) serve para orientar os navios na entrada de um porto. Essa bóia é formada por um hemisfério de 2 m de diâmetro e por um cone que tem 80 m de altura. Qual é o volume da bóia?

Fuso esférico



O **fuso esférico** é uma **parte da superfície esférica** que se obtém ao girar α graus (0 <α < 360º) uma **semicircunferência** em torno de seu eixo.

Área do fuso esférico

A área do fuso esférico pode ser obtida por uma regra de três simples.

Considere que o ângulo de giro seja α, a área do fuso seja A_F e que a área total da esfera é dada por $A_T = 4\pi r^2$ que é resultado de uma volta completa de 360°, podemos escrever:

$$360^o \rightarrow 4\,\pi r^2$$

$$\alpha \quad \rightarrow A_F$$

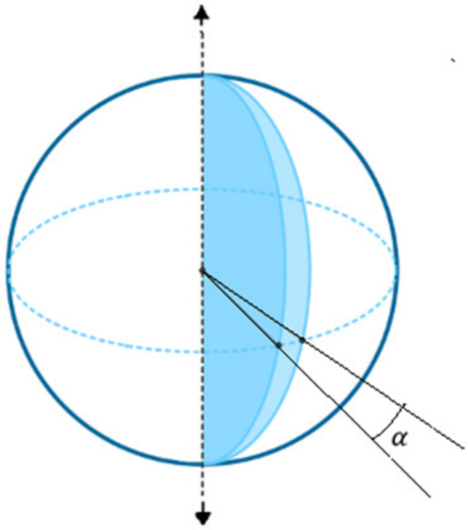
Multiplicando cruzado, teremos:

$$360A_F = 4\,\pi r^2\alpha$$

$$A_F = \frac{4\,\pi r^2\alpha}{360}$$

$$\boldsymbol{A_F = \frac{\pi r^2\alpha}{90}}$$

Cunha esférica



A **cunha esférica** é uma **parte da esfera** que se obtém ao girar α graus (0 < α < 360º) um **semicírculo** em torno de seu eixo.

O volume da cunha esférica também pode ser obtido por uma regra de três simples.

Considere que o ângulo de giro seja α, a **volume** da cunha seja V_C e que o volume total da esfera é dado por $V_T = \frac{4\,\pi r^3}{3}$ que é resultado de uma volta completa de 360°, Então podemos escrever:

$$360^o \quad \rightarrow \quad \frac{4\,\pi r^3}{3}$$

$$\alpha \quad \rightarrow \quad V_C$$

Multiplicando cruzado, teremos:

$$360\,V_C = \frac{4\,\pi r^3}{3}.\alpha$$

$$V_C = \frac{4\,\pi r^3 \alpha}{360\,.\,3}$$

$$\boldsymbol{V_C = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}}$$

Área total da cunha esférica

Observando a cunha esférica, verificamos que a área total será a soma das áreas de **dois semicírculos** com a **área do fuso esférico**, ou seja, a soma da área de **um círculo** de mesmo raio da cunha e a **área do fuso esférico**.

$$A_{tc} = \pi r^2 + A_F$$

Podemos comparar o **fuso esférico** como uma parte da **casca** e a **cunha esférica** como um **pedaço** de uma melancia cortada a partir do seu eixo

https://saborizatti.com.br

Exercício resolvido

Um feirante vende melancias perfeitamente esféricas e divide-as em 8 partes iguais a partir de seu eixo.. Suponha que suas melancias têm 30 cm de diâmetro. Nessas condições determine:

a) O ângulo de cada pedaço.

b) A área do fuso esférico obtido.

c) O volume da cunha esférica obtida.

d) Área total da cunha esférica.

Considere $\pi = 3{,}14$.

Resolução

a) O ângulo de cada pedaço.

Como uma volta completa o ângulo é 360° e a melancia foi divida por 8 pedaços iguais, cada pedaço terá um ângulo de 45° (360: 8 = 45).

Portanto, $\alpha = 45°$

b) A área do fuso esférico obtido.

$$A_F = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$$

$$A_F = \frac{\pi 30^2 . 45}{90}$$

$$A_F = \frac{\pi . 900 . 45}{90}$$

$$A_F = 450\ \pi$$

Considerando $\pi = 3{,}14$.

$$A_F = 450 \,.\, 3{,}14 = 1413 \text{ cm}^2.$$

Portanto, a área do fuso esférico é 1413 cm^2.

c) O volume da cunha esférica obtida.

$$V_C = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}$$

$$V_C = \frac{\pi 30^3 . 45}{270}$$

$$V_C = \frac{\pi . 27000 . 45}{270}$$

$$V_C = 4500\ \pi$$

Considerando $\pi = 3{,}14$.

$V_C = 450 \,.\, 3{,}14 = 141300\ \text{cm}^3$.

Portanto, o volume da cunha esférica é 141300 cm^3.

d) Área total da cunha esférica.

$A_{tc} = \pi r^2 + A_F$

$A_{tc} = 3{,}14 \,.\, 30^2 + 1413$

$A_{tc} = 2826 + 1413$

$A_{tc} = 4239\ \text{cm}^2$

Portanto, a área total da cunha esférica é $4239\ \text{cm}^2$.

Bibliografia

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. São Paulo, Ática, 2014.

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva. São Paulo, Moderna 2014.

BARROSO,Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva,2010.

MUNOHZ, Ainda, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Sites:

http://www.somatematica.com.br

Escola 24 horas - http://www.escola 24h.com.br

http://www.matematica.com.br