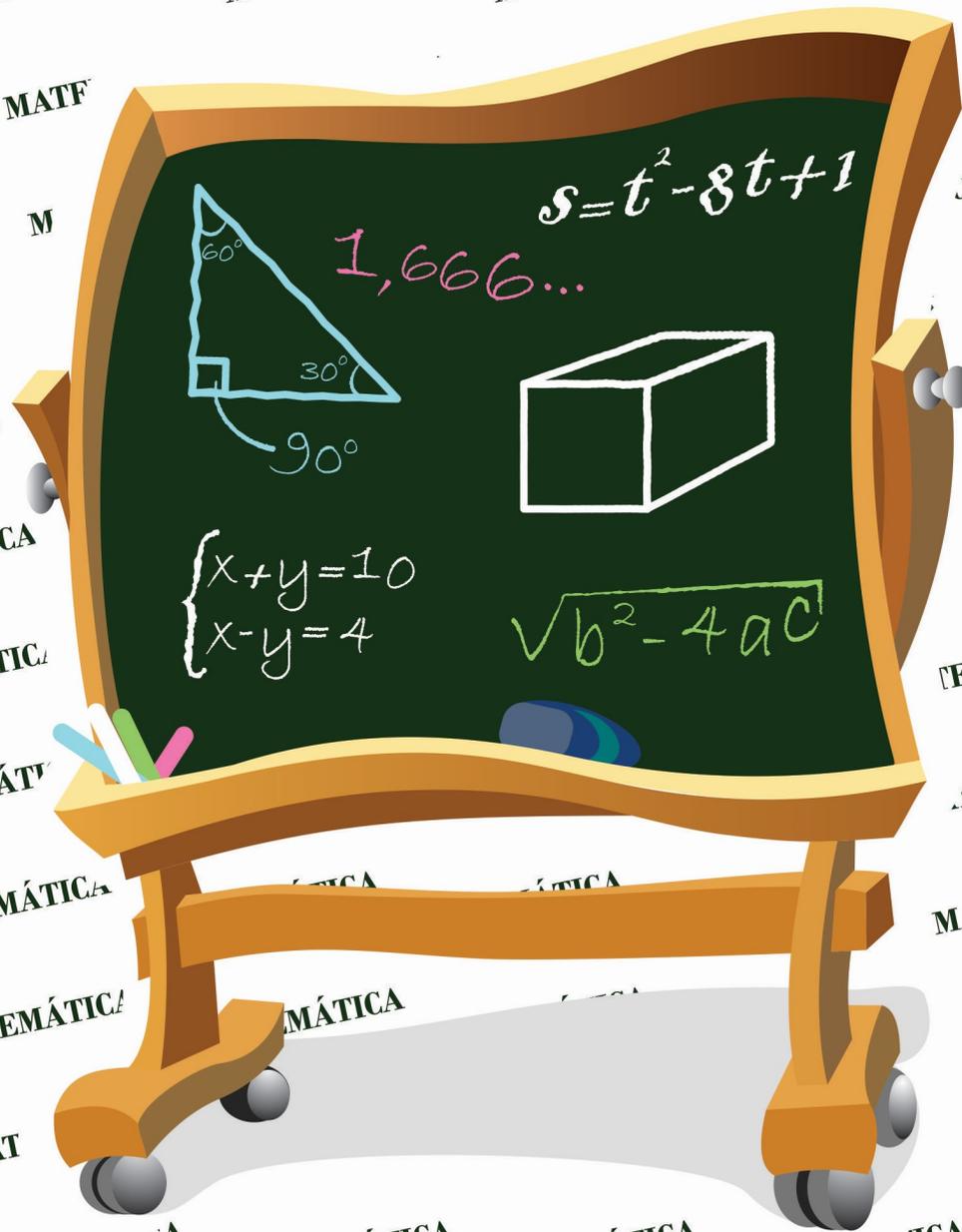


MATEMÁTICA



FAETEC

FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO



ETEVM

ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ



GOVERNO DO Rio de Janeiro

3^o ANO

GEOMETRIA ESPACIAL

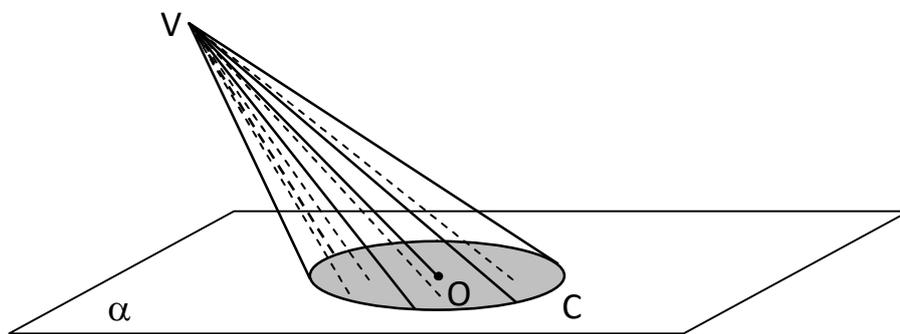
COORDENAÇÃO

SERGIO LOPES RODRIGUES

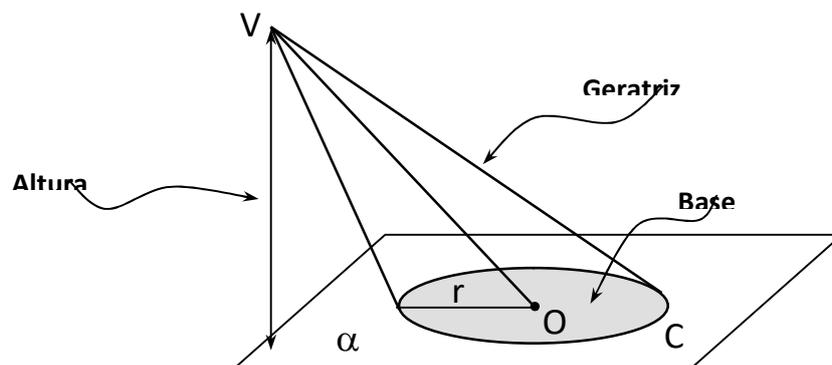
GEOMETRIA ESPACIAL

Cone

Consideremos um círculo C de centro O e raio R , contido em um plano α , e um ponto V , fora de α , chama-se cone a reunião de todos os segmentos que têm um extremo em V e o outro nos pontos do círculo.



Elementos de um cone



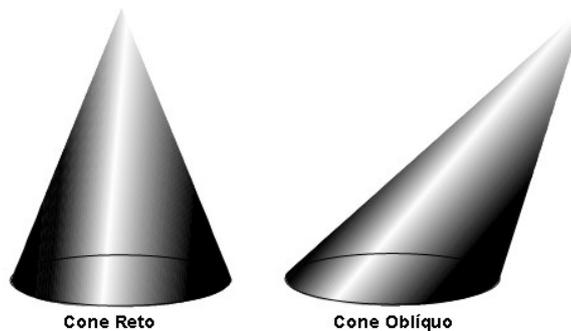
- A reta \overline{VO} é chamada de EIXO do cone.
- O círculo C e o ponto V são chamados, respectivamente, de BASE e VÉRTICE do cone.
- O raio do círculo C é chamado de RAIO DA BASE do cone.
- A distância do vértice ao plano da base é chamada de ALTURA do cone.

- Todo segmento de reta, cujos extremos são o ponto V e um ponto da circunferência da base, é chamado de GERATRIZ do cone.
-

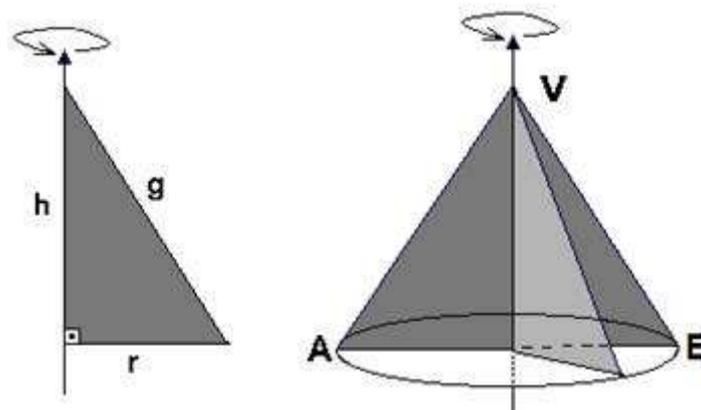
Classificação dos cones

É classificado de acordo com a inclinação do eixo em relação à base.

- **Cone oblíquo** – quando o eixo é oblíquo à base.
- **Cone reto ou cone de revolução** – quando o eixo é perpendicular à base.



OBSERVAÇÃO: O cone reto também é chamado de cone de revolução é o sólido obtido pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um dos catetos. As geratrizes são todas congruentes entre si.

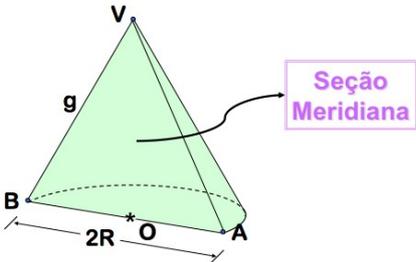


Num cone reto temos:

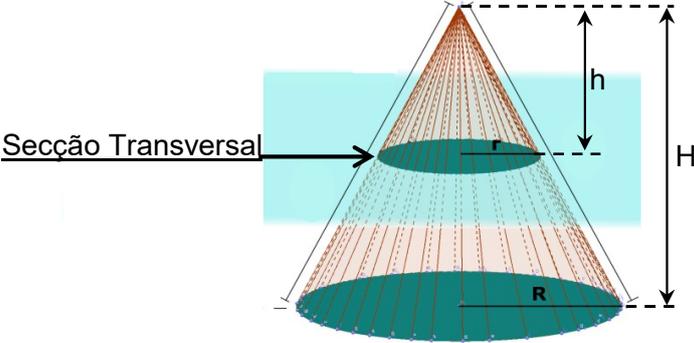
$$g^2 = h^2 + r^2$$

Secção de um cone reto

- **Secção meridiana** – é a intersecção do cone com um plano que contém o eixo. A secção meridiana de um cone reto é um **triângulo isósceles**.



- **Secção transversal** – é a intersecção do cone com um plano paralelo à sua base, não passando pelo vértice. A secção transversal de um cone reto é um **círculo**.



Sendo a base e a secção paralelas, temos as relações:

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{Área da secção } (\pi r^2)}{\text{Área da base } (\pi R^2)} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$

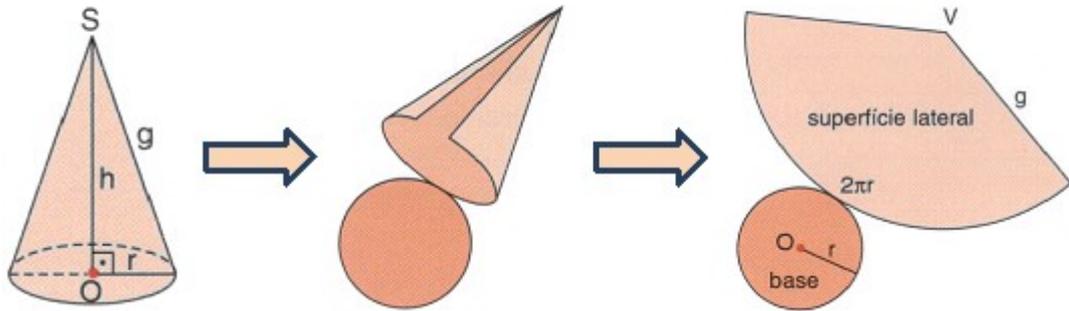
Cone equilátero

É aquele cuja secção meridiana de um cone reto, é um triângulo equilátero, nesse caso, a geratriz é igual ao diâmetro da base.



Áreas de um cone circular reto

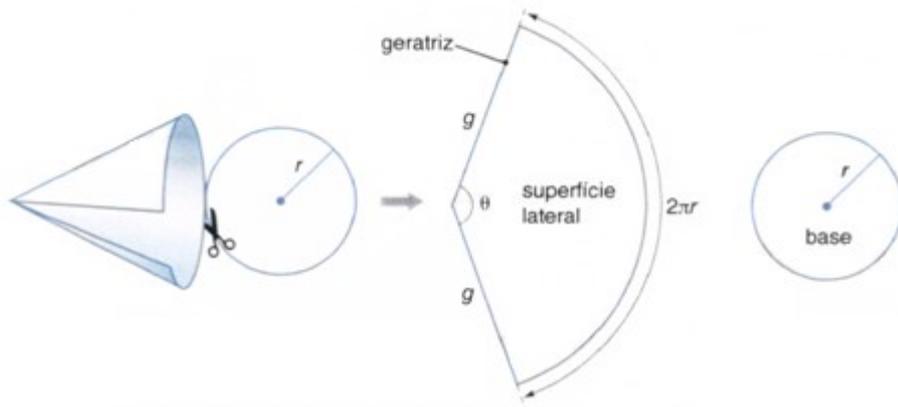
Planificando o cone temos:



- **Área da base (S_B)** – é a área de um círculo de raio r .

$$A_B = \pi r^2$$

- **Área lateral (S_L)** – é a área de um setor circular de raio g cujo arco tem comprimento $2\pi r$.



Note que o comprimento do arco do setor é o comprimento da circunferência da base do cone.

A área do setor equivale à superfície lateral do cone é a área lateral A_L do cone, ou seja:

Comprimento do arco

Área do setor

$$2\pi g$$

$$\pi g^2$$

$$2\pi r$$

$$A_L$$

$$2\pi g \cdot A_L = \pi g^2 \cdot 2\pi r \Rightarrow A_L = \frac{\pi g^2 \cdot 2\pi r}{2\pi g}$$

$$A_L = \pi r g$$

- **Área total (S_T)** – é a soma da área da base com a área lateral.

$$A_T = A_B + A_L \quad \Leftrightarrow \quad A_T = \pi r^2 + \pi r g$$

$$A_T = \pi r(r + g)$$

Volume do cone

O cálculo do volume do cone é semelhante ao do volume da pirâmide, ou seja:

$$V_{\text{cone}} = \frac{V_{\text{cilindro}}}{3}$$

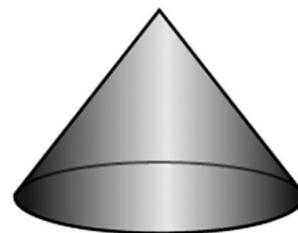
$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

Vale lembrar que se quiséssemos encher de água um vasilhame em **forma de um cilindro**, com um vasilhame em **forma de um cone** de **mesma base e altura** do cilindro, precisaríamos enchê-lo totalmente **três vezes**.

Exercícios Resolvidos

1. Sabendo que a área da base de um cone equilátero é $S_B = 9\pi^2$, determine:

- a) a medida do seu raio
- b) a medida da geratriz desse cone
- c) a medida da sua altura
- d) a sua área lateral
- e) a sua área total



Solução:

$$\begin{aligned} \text{a) } A_B = \pi r^2 &\Rightarrow 9\pi = \pi r^2 \\ r^2 = 9 &\Rightarrow r = 3\text{cm} \end{aligned}$$

$$\text{b) } g = 2r \quad \Rightarrow \quad g = 6\text{cm}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } g^2 = h^2 + r^2 &\Rightarrow 6^2 = h^2 + 3^2 \\ 36 = h^2 + 9 &\Rightarrow h^2 = 27 \\ h = \sqrt{27} &\Rightarrow h = 3\sqrt{3}\text{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } A_L = \pi r g &\Rightarrow A_L = \pi \cdot 3 \cdot 6 \\ &A_L = 18\pi\text{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } A_T = A_L + A_B &\Rightarrow A_T = 18\pi + 9\pi \\ &A_T = 27\pi\text{cm}^2 \end{aligned}$$

2. Para a produção de embalagens para presentes, um artesão utiliza diversos materiais. A tampa de uma dessas embalagens tem a forma de um cone reto sem a base, com raio 2 cm e geratriz medindo 9 cm. Sabendo que esse artesão pretende cobrir com tecido a superfície externa dessa tampa, calcule a quantidade mínima a ser utilizada.

(Considere $\pi = 3,14$)

Solução:

$$A_L = \pi r g \quad \Rightarrow \quad A_L = \pi \cdot 2 \cdot 9 \quad \Rightarrow \quad A_L = 18\pi\text{cm}^2$$

3. Calcule o volume de um cone cuja geratriz mede $2\sqrt{29}\text{cm}$ e cuja altura é 10 cm.

Solução:

$$\begin{aligned} g^2 = h^2 + r^2 &\Rightarrow (2\sqrt{29})^2 = 10^2 + r^2 \\ 116 = 100 + r^2 &\Rightarrow r^2 = 16 \\ r = 4\text{cm} & \end{aligned}$$

Cálculo do **volume**

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 10}{3} \\ V &= \frac{16 \cdot 10}{3} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{160\pi}{3} \text{cm}^3 \end{aligned}$$

3. Qual o volume do cone obtido pela rotação completa, em relação ao menor lado, de um triângulo retângulo com catetos medindo 6 cm e 8 cm?

Solução

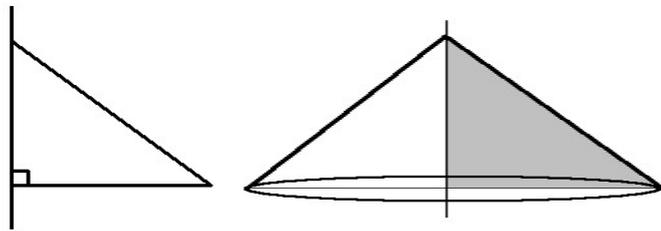
Raio = 8 cm
 Altura = 6 cm

Cálculo do volume

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 6}{3}$$

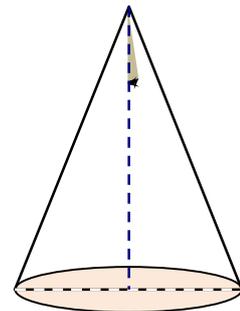
$$V = 128\pi \text{ cm}^3$$



Exercícios

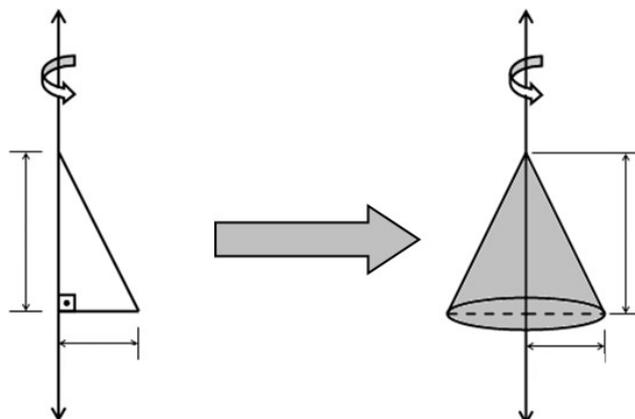
1. Um cone reto de geratriz igual a 10 cm forma um ângulo de 30° com o eixo desse cone. Calcule:

- a) O raio
- b) A altura
- c) A área da base
- d) A área lateral
- e) A área total
- f) O volume

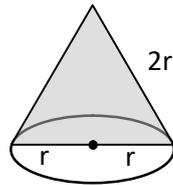


2. Considerando o sólido gerado pela rotação completa do triângulo retângulo de catetos 5 cm e 12 cm (em torno de seu maior lado), determine:

- a) Área da base
- b) Área lateral
- c) Área total
- d) Volume

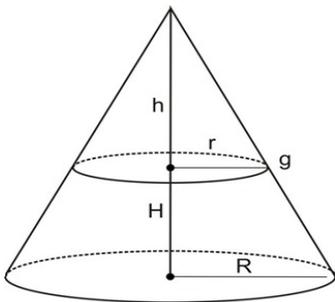


3. O raio da base de um cone equilátero mede 5 cm. Calcular a medida da geratriz e a medida da altura desse cone.

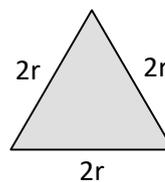
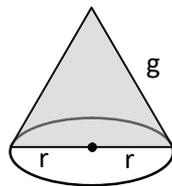


4. Um cone circular reto de 10 cm de altura tem raio 4 cm. Calcular a área da secção transversal feita por um plano a 2 cm do vértice.

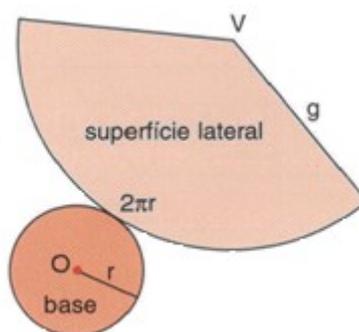
5. A geratriz de um cone reto tem 5 dm e o raio mede 3 dm. Achar a área da secção transversal feita a 1 dm do vértice.



6. A área da secção meridiana de um cone equilátero é $25\sqrt{3}cm^2$. Calcular o raio, a altura e a geratriz desse cone.



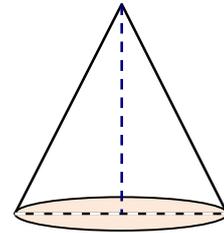
7. Calcular o volume de um cone reto cuja área lateral é $24\sqrt{11}\pi m^2$ e o raio da base é $2\sqrt{11}m$.



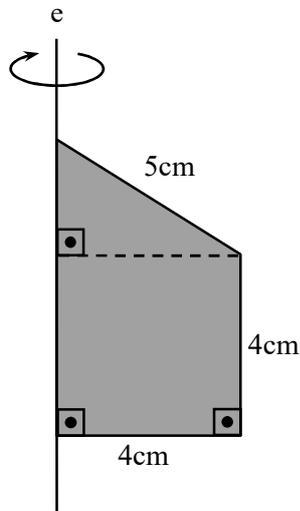
8. A geratriz de um cone reto mede 10 cm e sua área total é $96\pi\text{cm}^2$.

Calcule:

- O raio da base
- A altura
- A área lateral
- O volume



9. Calcule a área total e o volume do sólido obtido pela rotação da superfície sombreada em torno do eixo e.

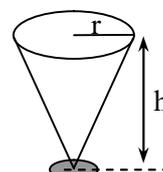
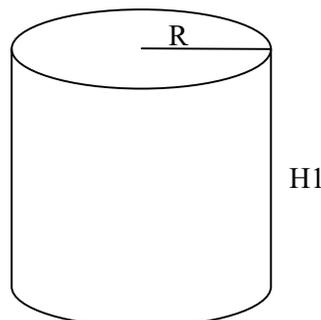


10. Um bar da cidade, em seu reveillon, ofereceu a seus fregueses um barril de chope que foi servido em tulipas:

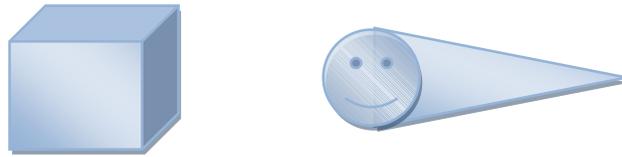
- o barril tinha formato de um cilindro circular reto com 20cm de raio (R) e 30cm de altura (H);

- a tulipa tinha formato de um cone reto com 3cm de raio (r) e 10cm de altura (h).

Quantas tulipas foram servidas desse barril, admitindo-se que não houve perda?

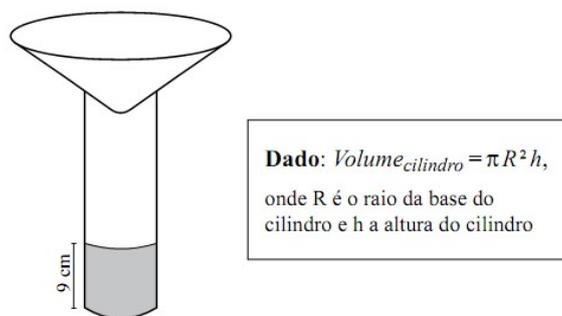


11. Uma pessoa deseja fazer enfeites para festa de seu filho de acordo com a figura:



O cubo tem aresta 10 cm e o cone reto tem diâmetro 10 cm e altura 12 cm. Como usará folha de cartolina de 1m^2 , quantas folhas no mínimo deverá comprar para fazer 50 enfeites de cada? (considere $\pi = 3$)

12. Índice pluviométrico é uma medida em milímetros, resultado do somatório da quantidade de precipitação de água de chuva em um determinado local durante um dado período de tempo. Um índice pluviométrico de 250 mm indica que, se uma caixa vazia, com 1 metro quadrado de base, fosse deixada aberta durante um certo período de chuva, a altura de água na caixa atingiria 250mm. O aparelho que mede o índice pluviométrico é chamado pluviômetro. Um pluviômetro de uma determinada região é formado por um cilindro conectado a um cone, conforme mostra a figura.

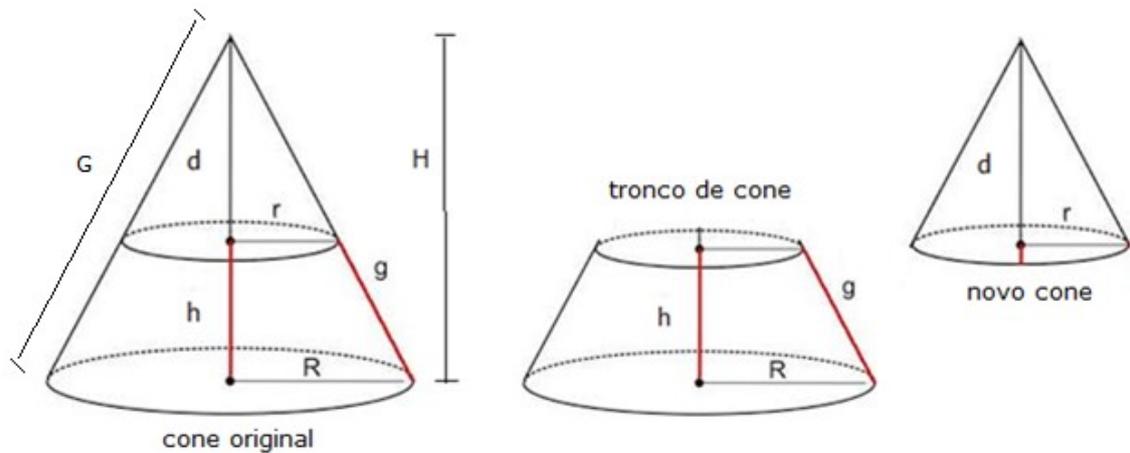


Sabendo-se que o raio da base do cone é 30 cm, o raio da base do cilindro é 10 cm e que o medidor marcou 9 cm em um determinado dia de chuva, conclui-se que o índice pluviométrico na região, nesse dia, foi de

- (A) 2,5 mm.
- (B) 5,0 mm.
- (C) 10 mm.
- (D) 20 mm.
- (E) 50 mm.

Tronco do cone

Quando seccionamos um cone reto por um plano paralelo à base, obtemos um novo cone reto e um sólido denominado **tronco de cone** reto.



Em um tronco de cone, podemos destacar:

- Base maior (B) é a base do cone original.
- Base menor (b) é a seção determinada pelo plano.
- Geratriz (g) cuja medida é a diferença entre a geratriz do cone original e a geratriz novo cone.

Observe que: $\frac{H}{d} = \frac{R}{r} = \frac{G}{G-g}$

Áreas de um tronco de cone reto

- Áreas das bases

Base maior

$$A_B = \pi R^2$$

Base menor

$$A_b = \pi r^2$$

• Área lateral

A área lateral do tronco de cone é igual à área lateral do cone original menos a área lateral do novo cone:

$$A_L = \pi R G - \pi r (G - g)$$

$$A_L = \pi R G - \pi r G + \pi r g$$

$$A_L = \pi G (R - r) + \pi r g \quad (I)$$

Como: $\frac{R}{r} = \frac{G}{G-g}$

$$R G - R g = r G$$

$$R G - r G = R g$$

$$G(R - r) = R g \quad \Rightarrow \quad G = \frac{R g}{R - r}$$

Substituindo G em (I), temos:

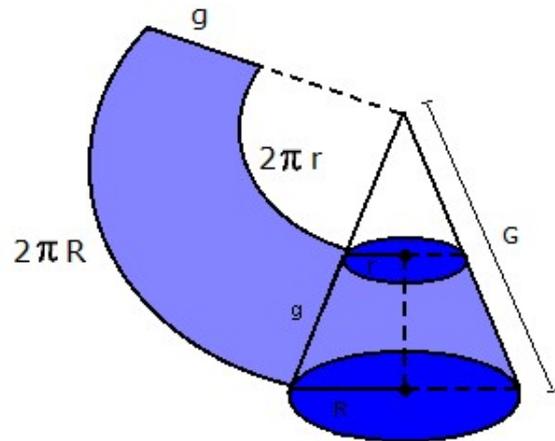
$$A_L = \pi \cdot \frac{R g}{R - r} \cdot (R - r) + \pi r g$$

$$A_L = \pi R g + \pi r g$$

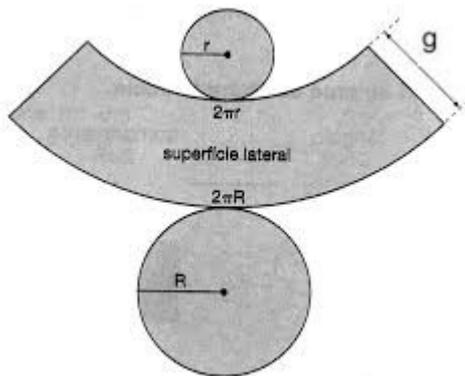
$$A_L = \pi g (R + r)$$

Portanto, a fórmula para calcular a área lateral do tronco é:

$$A_L = \pi g (R + r)$$



- Área total



É a soma das áreas das bases com a área lateral.

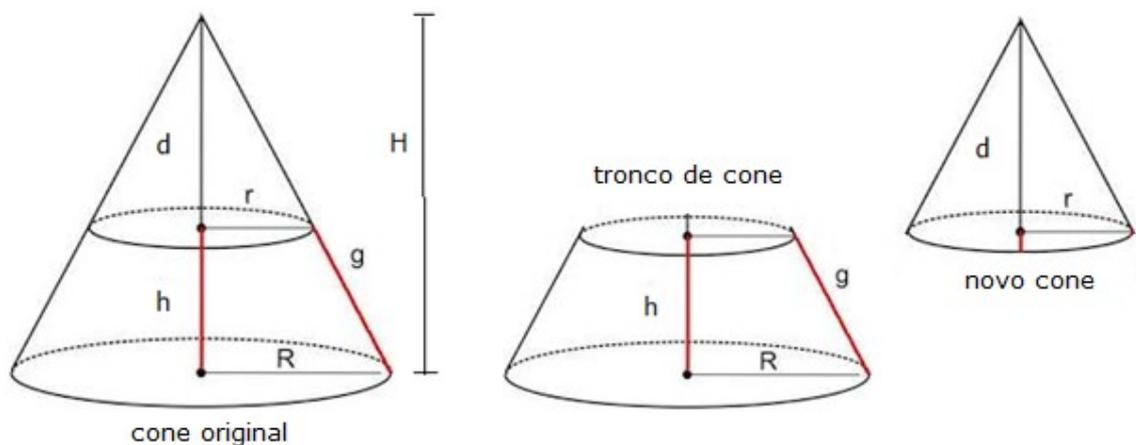
$$A_t = A_b + A_B + A_L$$

$$A_t = \pi r^2 + \pi R^2 + \pi g(R + r)$$

$$A_t = \pi r^2 + \pi R^2 + \pi Rg + \pi rg$$

$$A_t = \pi[R(R + g) + r(r + g)]$$

Volume do tronco de cone



O volume do tronco de um cone é a diferença entre o volume do cone original e o volume do novo cone.

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot d$$

Podemos chegar a fórmula do volume do tronco de cone partindo da fórmula do volume tronco de pirâmide. veja:

$$V_t = \frac{h_t}{3} \cdot (A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b)$$

Como no tronco de cone as áreas das bases são $A_B = \pi R^2$ e $A_b = \pi r^2$,

podemos substituí-las na fórmula acima:

$$V_t = \frac{1}{3} h (\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} + \pi r^2)$$

$$V_t = \frac{1}{3} h (\pi R^2 + \sqrt{\pi^2 R^2 r^2} + \pi r^2)$$

$$V_t = \frac{1}{3} h (\pi R^2 + \pi Rr + \pi r^2)$$

$$V_t = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$$

Portanto, a fórmula para cálculo do volume do tronco de cone é:

$$V_t = \frac{\pi \cdot h}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

Exercícios Resolvidos

1. Considere um cone circular reto com raio da base medindo 10 cm e altura 20 cm seccionado por um plano paralelo à sua base a 12 cm de altura. Calcule o volume do tronco de cone determinado por esse plano.

Solução

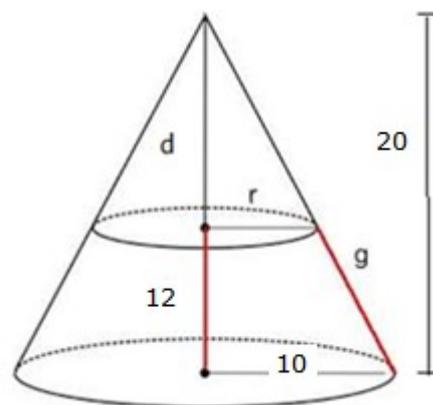
$$H = 20 \text{ cm}$$

$$R = 10 \text{ cm}$$

$$h_t = 12 \text{ cm, logo } d = 8 \text{ cm}$$

Usando a razão de semelhança temos:

$$\frac{H}{d} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{20}{8} = \frac{10}{r} \Rightarrow 20r = 80 \Rightarrow r = 4 \text{ cm}$$



Cálculo do volume

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 20}{3} - \frac{\pi 4^2 \cdot 8}{3}$$

$$V = \frac{2000\pi}{3} - \frac{128\pi}{3}$$

$$V = \frac{1872\pi}{3}$$

$$V = 624\pi \text{ cm}^3$$

Poderíamos usar a fórmula e resolver direto, veja:

$$V_t = \frac{\pi \cdot h_t}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

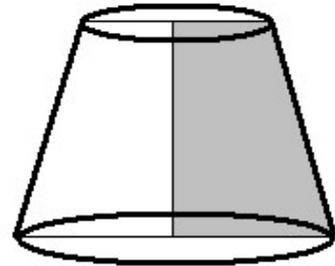
$$V_t = \frac{\pi \cdot 12}{3} (10^2 + 10 \cdot 4 + 4^2)$$

$$V = 624\pi \text{ cm}^3$$

Em geral, é mais adequado obter o volume do tronco pela subtração dos volumes dos cones em vez de decorar a fórmula, mas fica ao seu critério.

2. Sabendo que um tronco de cone reto possui bases de raios 4 cm e 6cm e a geratriz desse tronco de cone mede 5 cm, determine a medida da sua:

- a) área da base menor
- b) área da base maior
- c) área lateral
- d) área total

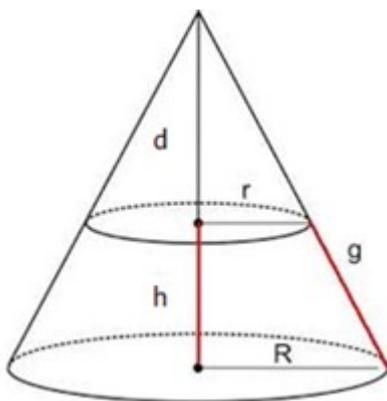


Solução:

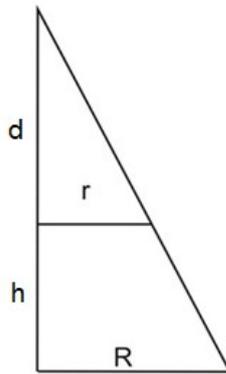
- a) $A_b = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot 4^2 \Rightarrow A_b = 16\pi \text{ cm}^2$
- b) $A_B = \pi \cdot R^2 \Rightarrow A_B = \pi \cdot 6^2 \Rightarrow A_B = 36\pi \text{ cm}^2$
- c) $A_L = \pi \cdot g(R+r) \Rightarrow A_L = \pi \cdot 5(6+4) \Rightarrow A_L = 50\pi \text{ cm}^2$
- d) $A_T = A_L + A_B + A_b \Rightarrow A_T = 50\pi + 36\pi + 16\pi \Rightarrow A_T = 92\pi \text{ cm}^2$

Aproveitando, vamos também demonstrar por semelhança de triângulos a Fórmula do Volume de Tronco de Cone.

Dado o cone abaixo, seccionado paralelamente a uma altura h de sua base.



Destacamos desse cone o triângulo retângulo, conforme figura abaixo:



Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{h+d}{d} = \frac{R}{r}$$

$$(h+d)r = dR \quad \Rightarrow \quad dR = hr + dr \quad \Rightarrow \quad dR - dr = hr \quad \Rightarrow \quad d(R-r) = hr$$

$$d = \frac{hr}{(R-r)}$$

O volume do tronco de cone é dado por:

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot (h+d) - \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot d$$

$$V_t = \frac{1}{3} (\pi R^2 h + \pi R^2 d) - \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot d$$

$$V_t = \frac{1}{3} \pi (R^2 h + R^2 d - r^2 \cdot d)$$

$$V_t = \frac{1}{3} \pi (R^2 h + d(R^2 - r^2))$$

Substituído $d = \frac{hr}{(R-r)}$ na expressão, temos:

$$V_t = \frac{1}{3} \pi \left(R^2 h + \frac{hr}{(R-r)} (R^2 - r^2) \right)$$

$$V_t = \frac{1}{3} \pi \left(R^2 h + \frac{hr}{(R-r)} (R-r) \cdot (R+r) \right)$$

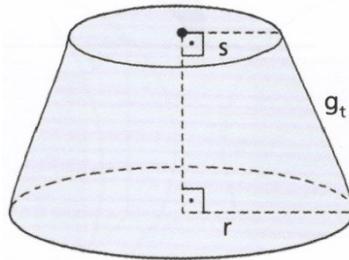
$$V_t = \frac{1}{3} \pi (R^2 h + hr \cdot (R+r))$$

Assim, chegamos a fórmula do cálculo do volume do tronco de cone:

$$V_t = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$$

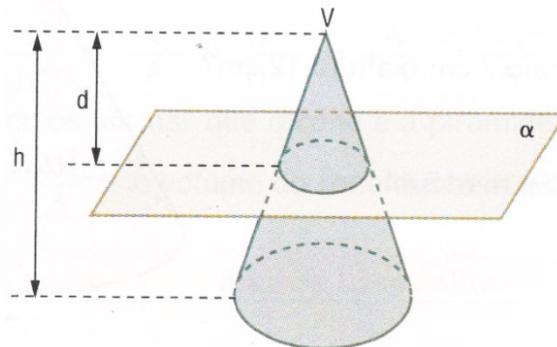
Exercícios

1. Um tronco de cone tem bases de raios 6 cm e 4 cm. Sabendo-se que a geratriz do tronco mede 5 cm, calcular a área lateral e a área total do tronco de cone.

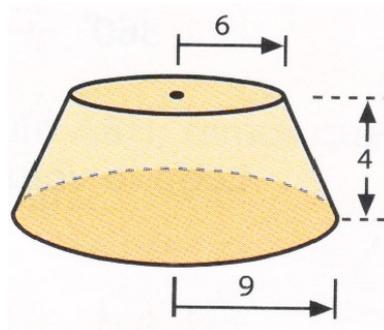


2. Um cone circular reto tem raio 4 m e altura 8 m. Qual é a área da secção transversal feita por um plano distante 2 m do seu vértice?

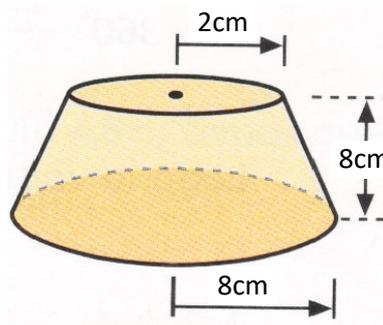
3. Um cone circular reto tem altura 10 cm. A que distância do vértice se deve traçar um plano paralelo à base, de modo que o volume do tronco seja igual à metade do volume do cone dado?



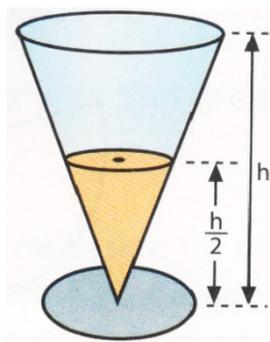
4. Os raios das bases de um tronco circular reto são 9 m e 6 m. Sabendo-se que a altura do tronco é 4 m, calcular o volume do tronco.



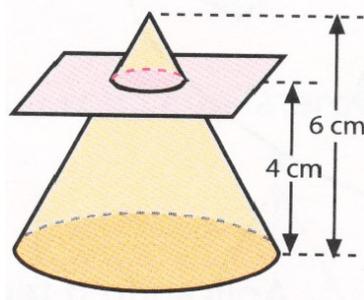
5. Um tronco de cone reto de bases paralelas possui os raios das bases 2 cm e 8 cm e a altura, 8 cm. Calcular a área lateral e a área total desse tronco.



6. Um copo de refrigerante, com formato cônico e capacidade total de 400ml, encontra-se com líquido até a metade da sua altura. Considerando que o copo foi servido cheio até a boca, pergunta-se: quantos mililitros do líquido já foi bebido?



7. Um cone reto de altura 6 em e volume 135 cm^3 é seccionado por um plano paralelo à sua base e distante 4 em da mesma. Determine o volume do cone menor estabelecido por essa secção.



8. A cúpula de um abajur tem a forma de um tronco de cone circular reto. As bases têm 2cm e 5cm de raio, e a altura mede 9 cm. Calcule:

Quantos centímetros quadrados de tecido, no mínimo, são utilizados para revesti-lo? (Considere: $\pi = 3,14$ e $\sqrt{10} = 3,16$)



Bibliografia

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. São Paulo, Ática, 2014.

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva. São Paulo, Moderna 2014.

BARROSO, Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva, 2010.

MUNOZH, Aínda, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Sites:

<http://www.somatematica.com.br>

Escola 24 horas - <http://www.escola24h.com.br>

<http://www.matematica.com.br>