Análise Combinatória

Agrupamento Simples

Ocorre quando temos a seguinte situação: Há um conjunto e devemos formar um agrupamento escolhendo, sem repetir, alguns de seus elementos.

Arranjos Simples

Arranjo Simples é um agrupamento simples em que um grupo é diferente de outro pela ordem ou pela natureza dos seus elementos componentes.

EXEMPLOS:

a) Quantos números de dois algarismos distintos podem ser formados usando os algarismos 2, 3, 4 e 5?

Dez.	Unid.	Número
2	3	23
	4	24
	5	25
3	2	32
	4	34
	5	35
4	2	42
	3	43
	5	45
5	2	52
	3	53
	4	54

12 números

Observe que os grupos obtidos diferem entre si:

☞ Pela ordem dos elementos (23 e 32 por exemplo);

☞ Pelos elementos componentes (natureza) (25 e 23 por exemplo)

Os grupos assim obtidos são denominados arranjos simples dos 4 elementos (2, 3, 4 e 5) tomados 2 a 2, e são indicados por $A_{4,2}$ ou A_2^4

b) De um grupo formado por 10 pessoas, três prêmios serão distribuídos por sorteio da seguinte maneira: o primeiro sorteado receberá uma bicicleta, o segundo sorteado receberá uma motocicleta e o terceiro sorteado receberá um automóvel. Quantos são os possíveis resultados para esse sorteio?

Resolvendo utilizando o P.F.C.:

10 possibilidades	x	9 possibilidades	x	8 possibilidades	=	720
Bicicleta		Motocicleta		Automóvel		sorteio

Temos, neste caso, arranjos simples dos 10 elementos tomados 3 a 3, e são indicados por $A_{10,3}$ ou A_3^{10}

Podemos utilizar o exemplo anterior para generalizarmos o cálculo do número de arranjos de n elementos tomados p a p.

De um grupo formado por n pessoas, p prêmios (distintos) serão distribuídos por sorteio da seguinte maneira: o primeiro sorteado receberá o prêmio 1, o segundo sorteado receberá prêmio 2, o terceiro sorteado receberá prêmio 3, e assim por diante. Quantos são os possíveis resultados para esse sorteio?

n possibilidades	x	n − 1 possibilidades	x	n − 2 possibilidades	x	...	n − (p−1) possibilidades
Prêmio 1		Prêmio 2		Prêmio 3		...	Prêmio p

Podemos dizer que o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é igual a:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando e dividindo o 2º membro dessa igualdade por $(n-p)!$, teremos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

O número dos arranjos de n elementos distintos tomados p a p pode ser calculado por meio da fórmula:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

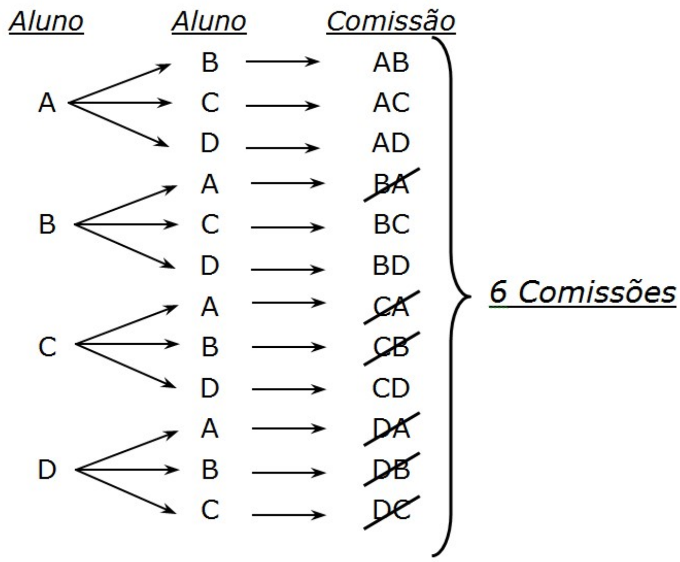
<u>Obs.:</u> Um arranjo simples de n elementos tomados n a n é chamado de permutação simples e representado por P_n, ou seja:

$$P_n = A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} \Rightarrow P_n = n!$$

Combinações Simples

Combinação Simples é um agrupamento simples em que um grupo é diferente de outro apenas pela natureza dos elementos componentes.

EXEMPLO: Quantas comissões de 2 pessoas podem ser formadas a partir dos alunos A, B, C e D?



Observe que os grupos AB e BA representam a mesma comissão. Os alunos A e B, não importa a ordem, formam apenas uma comissão. Isso significa que uma mesma comissão foi contada duas vezes. Portanto, o total de comissões é 6.

Os grupos assim obtidos são denominados combinações simples dos 4 elementos (A, B, C e D) tomados 2 a 2, e são indicados por $C_{4,2}$ ou C_2^4

Para calcularmos o número de combinações simples de n elementos distintos tomados p a p podemos determinar o número de arranjos simples e dividi-los por p!, pois isso elimina a contagem repetida dos agrupamentos que apresentam os mesmos elementos (apenas em ordem diferentes) que, neste tipo de agrupamento, representam o mesmo resultado.

O número das combinações simples de n elementos distintos tomados p a p pode ser calculado por meio da fórmula:

$$C_{n,p} = C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Como saber se um AGRUPAMENTO SIMPLES é ARRANJO ou COMBINAÇÃO?

1º – Forme um resultado que satisfaça o problema.
2º – Troque a ordem de dois elementos desse resultado.
Se você :
Alterou o resultado $\Rightarrow$ Arranjo
Continuou com o resultado $\Rightarrow$ Combinação

Permutação com elementos nem todos distintos

Como devemos proceder se quisermos saber o número de anagramas possíveis com as letras da palavra MAUÁ (desconsiderando o acento ortográfico)?

Se calcularmos considerando as letras como distintas, teremos: $P_4 = 4! = 24$

Porém, se em determinado anagrama mudarmos apenas a ordem das letras A, o anagrama será o mesmo: $MA_1UA_2 = MA_2UA_1$

Como há, em cada anagrama, duas maneiras de permutarmos as letras A, estamos considerando 2 vezes o número real de anagramas ao considerarmos 4! como o resultado.
Como podemos "consertar" esse erro?
Resp: Basta dividirmos o resultado por 2.

Assim: O número de anagramas da palavra MAUA é igual a:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$$

E se a palavra fosse PARADA?
Se calcularmos considerando as letras como distintas, teremos: $P_6 = 6! = 720$
Porém, se em determinado anagrama mudarmos apenas a ordem das letras A, o anagrama será o mesmo: $PA_1RA_2DA_3 = PA_2RA_1DA_3$

De quantas maneiras podemos permutarmos apenas as letras A em cada anagrama?
Vamos considerar o anagrama PARADA:

$$P\_\_R\_\_D\_\_ = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

Como há, em cada anagrama, 3! maneiras de permutarmos as letras A, estamos considerando 3! vezes o número real de anagramas ao considerarmos 6! como o resultado.
Como podemos "consertar" esse erro?
Resp: Basta dividirmos o resultado por 3!.

Assim: O número de anagramas da palavra PARADA é igual a:

$$P_6^3 = \frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$$

E se a palavra fosse BANANADA?

$$P_8^{4,2} = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} = 840$$

Generalizando:
Havendo n elementos para permutar e dentre eles um elemento se repete p vezes , outro elemento se repete q vezes, outro se repete r vezes e assim por diante, temos:

$$P_n^{p,q,r,\ldots} = \frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r! \cdot \ldots}$$

Exercícios de fixação

1) Calcule:

a) $A_{5,3}$

b) $A_{3,3}$

c) $A_{4,3}$

d) $A_{5,1}$

2) Calcule as combinações:

a) $C_{5,3}$

b) $\binom{6}{4}$

c) $C_{10,9}$

d) $\binom{12}{10}$

3) Simplifique se possível e calcule o valor:

a) 0!

b) 1!

c) 4!

d) $\frac{5!}{3!}$

e) $\frac{10!}{8!2!}$

f) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$ com (n>2)

4) Quantos anagramas da palavra ATOR existem? Quais são eles?
(Anagramas são combinações das mesmas letras em qualquer ordem, com ou sem significado)

5) Uma pizzaria vende pizzas em pedaços e tem 30 sabores de pizzas e 10 tipos de bebidas. De quantas maneiras se pode fazer uma refeição composta de dois pedaços de pizza de sabores diferentes e uma bebida?

6) Quantos números de cinco algarismos podemos formar usando, sem repetição, cinco números pares?

7) Nilza trabalha em um prédio que tem três portas de entrada, seis roletas e quatro elevadores. De quantas formas diferentes ela pode subir ao escritório?

8) Para a constituição de uma CPI (Comissão Parlamentar de Inquérito), deverão ser escolhidos vereadores de três partidos *A, B e C.*
Sabendo que serão escolhidos seis dos oito vereadores do partido *A*, quatro dos sete vereadores do partido *B* e cinco dos nove vereadores do partido *C*, determine de quantos modos é possível formar essa CPI.

9) (Enem-MEC) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter e um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.
Por exemplo, a letra A é representada por:

● ▪

▪ ▪

▪ ▪

O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

a) 12
b) 31
c) 36
d) 63
e) 720

10) Quantas combinações de 4 letras (com ou sem sentido) podem ser formadas usando as letras da palavra MILAGRE sem repetição? Se não usarmos a letra G, quantas combinações serão?

11) Ana tem cinco livros de Matemática e seis de Física e vai participar de um grupo de estudos onde há três mesas. Ela precisa colocar em cada mesa um livro de Matemática e um de Física. De quantas formas ela pode fazer isso?

12) (Enem-MEC) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos distribuídas conforme a tabela abaixo:

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos – uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

a) 1 320
b) 2 090
c) 5 845
d) 6 600
e) 7 245

13) Num grupo de 20 pessoas há apenas 5 mulheres. De quantas maneiras podemos escolher 4 pessoas de modo que haja pelo menos uma mulher?

14) Uma senha de uma rede de computadores é formada por 5 letras escolhidas entre as 26 do alfabeto.

a) Quantas senhas existem com todas as letras distintas e que comecem pela letra S?

b) Quantas senhas são possíveis, de modo que haja pelo menos duas letras iguais?

Observação: O resultado pode ser apenas indicado, não sendo necessário fazer as contas.

15) Com os dígitos de 3 a 9, quantos números de quatro algarismos, distintos ou não, podemos formar? Quantos deles, com algarismos distintos, são múltiplos de 5?

16) Quantos anagramas tem a palavra: FÍSICA? E a palavra BIOLOGIA? (Não considere o acento.)

17) Adi deseja jantar com Silvia num restaurante situado na torre de um *shopping center.* Sabendo que existem 4 entradas no andar térreo, 3 escadas rolantes de acesso ao 1º piso e 5 elevadores do 1º piso até o restaurante, determine de quantos modos distintos o casal pode chegar ao restaurante utilizando uma das entradas, uma escada rolante e um elevador.

18) No jogo da Mega Sena existem 60 números dos quais 6 devem ser sorteados. Quantas possibilidades há para o resultado desse sorteio? O jogador pode apostar até em 8 dezenas diferentes. Se fizer isso, quantas possibilidades de sorteio aquele jogo cobre?

19) Numa circunferência são marcados 7 pontos distintos. Quantos pentágonos com vértices podemos formar nesses pontos?

20) Num triângulo equilátero, três pontos são marcados em cada lado. Quantos triângulos diferentes podem ser formados com esses nove pontos? Desses triângulos, quantos têm um vértice em cada ângulo do triângulo original?

21) Para um trabalho escolar, um grupo de 6 alunos precisa escolher um coordenador, um auxiliar e um redator. De quantas maneiras isso pode ser feito? (Calcule com e sem a fórmula.)

22) Cláudia tem 10 amigos e precisa escolher 3 deles para ir com ela a um jantar. De quantas maneiras ela pode fazer isso?

23) Seis pessoas vão ao cinema juntas e encontram um único lugar com seis cadeiras disponíveis lado a lado. De quantas maneiras elas podem sentar-se?
E se forem três casais de namorados que não se sentam separados?

24) Com os dígitos: 1,2,3,4,5,7,9 :

a) quantos números de dois algarismos distintos se pode formar?

b) quantos números de dois algarismos distintos ou não se pode formar?

c) quantos números de três algarismos distintos se pode formar?

d) Quantos números pares de três algarismos distintos se pode formar?

e) quantos números ímpares de três algarismos distintos se pode formar?

25) Sete amigas, entre as quais Roberta e Joana, vão ao cinema. O número de modos que o grupo poderá ocupar 7 poltronas consecutivas numa mesma fila, sabendo que Roberta e Joana sempre sentam juntas, é:

a) 360
b) 720
c) 1080
d) 1440
e) 1800

26) Com os algarismos de 1 a 7, quantos números de 4 dígitos distintos, maiores ou que 5347, podemos formar?