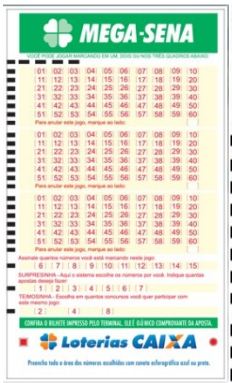
Análise Combinatória

É a parte da Matemática onde estudamos as técnicas de contagem de agrupamentos que podem ser feitos com elementos de um determinado conjunto. São basicamente dois tipos de agrupamentos que podemos formar: um em que se leva em conta a ordem dos elementos dentro do agrupamento e outro onde a ordem dos elementos não é relevante. Por exemplo:

a) Placa de automóvel:

As placas acima apresentam as mesmas letras e os mesmos algarismos, mas são diferentes, pois as letras ocupam ordens diferentes.

b) Duas pessoas farão, cada um, um jogo de Mega-sena



Ana jogará: 02, 15, 16, 30, 48 e 57

Carlos jogará: 48, 15, 02, 57, 16 e 30

Embora os números estejam em ordem diferente, o jogo de ambos é o mesmo.

Pensando um pouco mais nas duas situações acima, poderíamos nos perguntar:
Quantas placas diferentes de automóvel poderíamos ter usando as letras e os números das do exemplo (a)?

Quantos jogos diferentes, aposta de seis dezenas, da Mega-sena são possíveis?

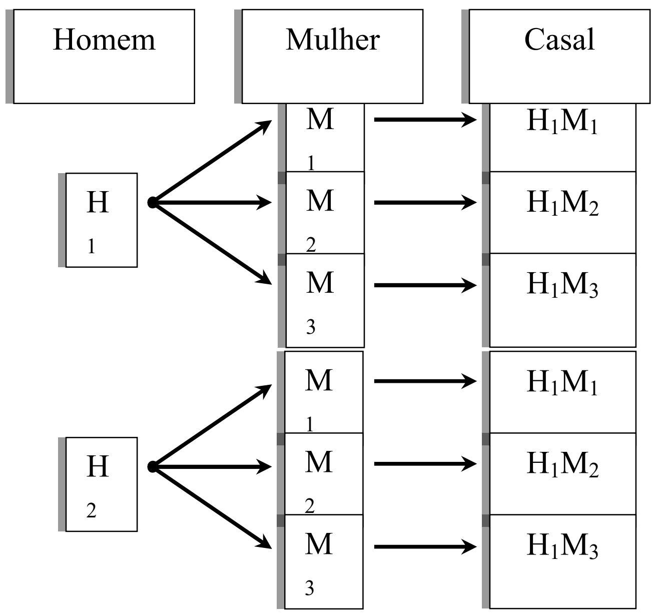
Para responder a essas perguntas utilizamos técnicas de contagem.

Princípio Fundamental da Contagem

Observe a seguinte questão:

Numa sala há dois homens e três mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal (homem; mulher)?

Para descobrir podemos fazer uma árvore de possibilidades.
Chamando os homens de H_1 e H_2 e as mulheres de M_1, M_2 e M_3 teremos:



Não é difícil perceber que o número de casais pode ser calculado da seguinte forma:

2 possibilidades	x	3 possibilidades	=	6
Homem		Mulher		Casal

O exemplo acima ilustra o Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo, que pode ser enunciado como:

Se uma tarefa é composta por duas etapas sucessivas e independentes de tal modo que a primeira etapa pode ser realizada de **n** maneiras e, para cada uma dessas maneiras, a segunda etapa pode ser realizada de **p** maneiras, o total de maneiras que essa tarefa pode ser realizada é igual a:

$$\underbrace{n}_{\text{Etapa 1}} \cdot \underbrace{p}_{\text{Etapa 2}} = n \cdot p$$

Podemos estender esse conceito para mais que duas etapas.

Outros exemplos

1) Quantos são os números naturais de três algarismos que são múltiplos de 5?

Para que o número seja um múltiplo de 5, o mesmo deve terminar em 0 ou 5, portanto temos apenas 2 possibilidades na última posição.

___ . __ . 2

Como o zero à esquerda de um número não é significativo, para que tenhamos um número natural com três algarismos ele deve começar com um dígito de 1 a 9, temos, portanto, 9 possibilidades.

9 . __ . 2

Para posição central temos 10 possibilidades, já que o zero pode ser usado.

9 . 10 . 2 = 180

Portanto, temos 180 números naturais de três algarismos que são múltiplos de 5.

2) Quantos números naturais de 4 algarismos distintos (diferentes) podemos formar?

Temos 9 (0 não é permitido) possibilidade para a primeira posição, 9 possibilidade para a segunda posição, pois um dígito já foi utilizado, 8 possibilidade para a terceira posição, pois dois dígitos já foram utilizados e 7 possibilidade para a quarta posição.

9 . 9 . 8 . 7 = 4536

Portanto, 4536 números.

3) De quantas formas podemos dispor as letras da palavra FELIZ de modo que a última letra seja sempre a letra Z?

Para a última letra, segundo o enunciado temos apenas uma possibilidade que é a letra Z.

___ . __ . __ . __ . 1

Para a primeira, segunda, terceira e quarta letras temos respectivamente 4, 3, 2 e 1 possibilidades. Assim temos:

4 . 3 . 2 . 1 . 1 = 24

Portanto, podemos dispor as letras da palavra FELIZ de 24 maneiras diferentes, tal que a última letra seja sempre a letra Z.

4) Quantos números naturais com 3 algarismos podemos formar que não comecem com 25, nem com 23?

Neste exemplo iremos fazer o cálculo em duas partes. Primeiro iremos calcular quantos são os números com três algarismos.

Como neste caso na primeira posição não podemos ter o dígito zero, o número de possibilidades para cada posição é respectivamente: 9, 10 e 10.

Portanto, temos 9 **.** 10 **.** 10 = 900 números naturais com três algarismos.

Agora vamos calcular quantos deles começam com 25 ou 23.

Para a primeira posição temos apenas uma possibilidade, o dígito 2. Para a segunda temos duas, pois servem tanto o dígito 5, quanto o 3.

Para a terceira e última posição temos todos os dígitos possíveis, ou seja, 10 possibilidades.

Portanto, temos 1 **.** 2 **.** 10 = 20 números naturais com três algarismos que comecem com 25 ou 23.

Agora que não começam será:

900 – 20 = 880

Portanto, 880 números naturais de três algarismos não começam com 25, nem com 23.

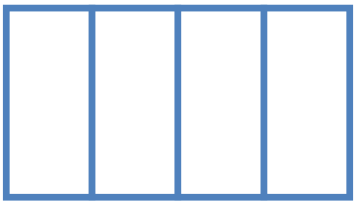
Exercícios

1. Possuo 3 pares de sapatos e 7 pares de meias. De quantas maneiras poderei me calçar utilizando um par de meias e um de sapatos?

2. Quantos anagramas (formas de dispor as letras) a palavra PROVA possui?

3. Dos anagramas da palavra DESAFIO:
a) Quantos começam com uma vogal?
b) Quantos começam com vogal e terminam com consoante?
c) Quantos apresentam as letras DE juntas e nessa ordem?
d) Quantos apresentam as letras DE juntas?

4. Paulão dispõe de 6 cores para pintar uma bandeira de 4 faixas.



Cada faixa deve ser pintada de uma só cor. De quantos modos ele pode realizar a pintura, de modo que não haja:
a) duas faixas da mesma cor?
b) duas faixas vizinhas da mesma cor?

5. Quantos números de quatro algarismos, no sistema decimal de numeração,:
a) possuem algarismos distintos?
b) são ímpares e possuem algarismos distintos?
c) são pares e possuem algarismos distintos?

6.Uma moeda será lançada três vezes. Quantos são os resultados diferentes que podemos obter?

7 . O DETRAN decidiu que as placas dos veículos do Brasil serão codificadas usando-se 3 letras do alfabeto e 4 algarismos. Qual o número máximo de veículos que poderá ser licenciado?

8. De um grupo formado por 10 pessoas, três prêmios serão distribuídos por sorteio da seguinte maneira: o primeiro sorteado receberá uma bicicleta, o segundo sorteado receberá uma motocicleta e o terceiro sorteado receberá um automóvel. Quantos são os possíveis resultados para esse sorteio?

9. A senha de acesso a um jogo de computador consiste em quatro caracteres alfabéticos ou numéricos, sendo o primeiro necessariamente alfabético. O número de senhas possíveis será, então:

a) 36^4.
b) 10×36^3.
c) 26×36^3.
d) 26^4.
e) 10×26^4.