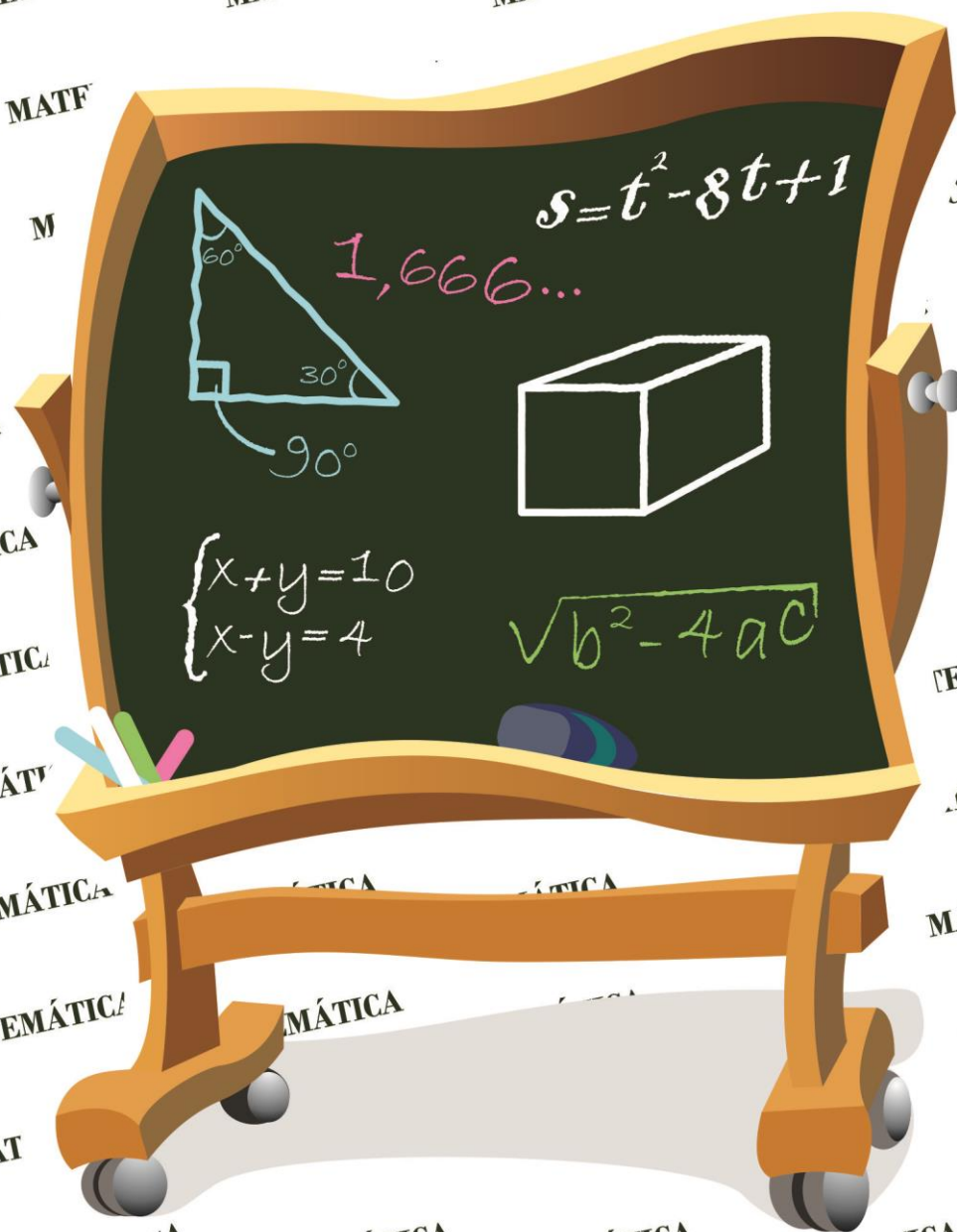


MATEMÁTICA



3º ANO

1ª etapa

GEOMETRIA ESPACIAL

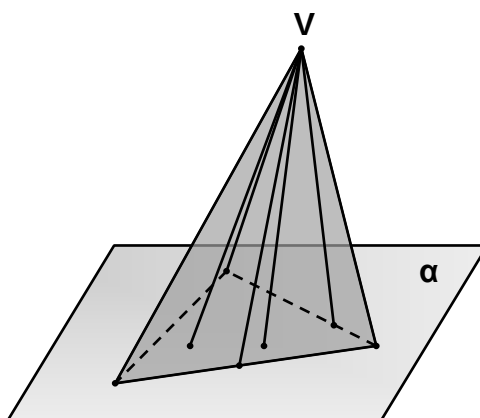
COORDENAÇÃO

SERGIO LOPES RODRIGUES

GEOMETRIA ESPACIAL

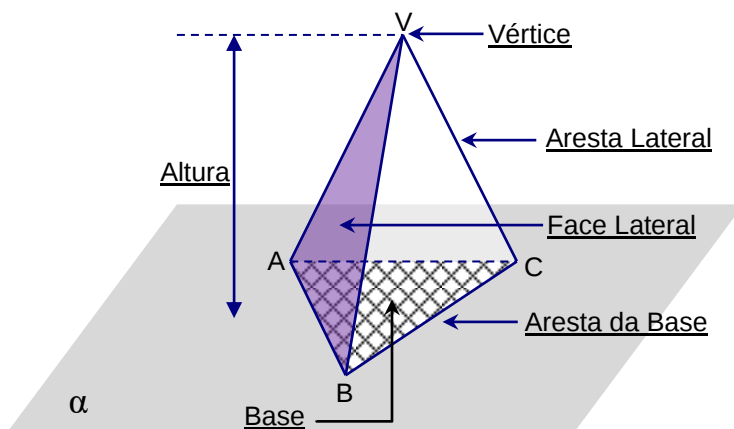
Pirâmide

Considerando um polígono convexo contido em um plano α e um ponto V externo ao plano α .



Chamamos de pirâmide a região do espaço limitada pelos segmentos com extremidade em V ($V \notin \alpha$) e outra nos pontos do polígono dado.

Elementos de uma pirâmide



- **Base** – é o polígono contido no plano α .
- **Altura** – é a distância entre o ponto V e o plano α

- **Arestas da base** – são os lados do polígono contido no plano α .
- **Arestas laterais** – são os segmentos: $VA, VB, \dots$
- **Faces laterais** – são os triângulos $VAB, VBC, \dots$

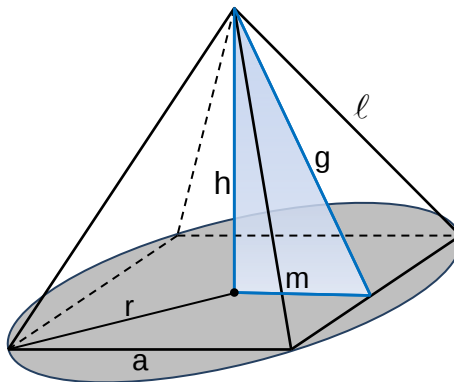
Classificação de uma pirâmide

Uma pirâmide é classificada de acordo com o polígono da base.

- **Pirâmide triangular ou tetraedro** – quando a base é um triângulo
- **Pirâmide quadrangular** – quando a base é um quadrilátero
- **Pirâmide pentagonal** – quando a base é um pentágono e assim por diante

Pirâmide regular

É uma pirâmide que tem como base um polígono regular e cuja projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base coincide com o centro da base.



Em uma pirâmide regular destacamos

- I. As arestas laterais são congruentes
 - II. As faces laterais são triângulos isósceles congruentes
- **a** – aresta da base
 - **h** – altura
 - **ℓ** – aresta lateral
 - **r** – raio do círculo que circunscreve a base

- **m** – apótema da base (segmento com extremidades no centro do polígono e no ponto médio da aresta da base)
- **g** – apótema da pirâmide (é a altura de uma face lateral relativa à aresta da base).

Usando o Teorema de Pitágoras, encontramos as relações:

$$g^2 = h^2 + m^2$$

$$l^2 = h^2 + r^2$$

$$l^2 = g^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Áreas

Assim como no prisma, definimos para a pirâmide:

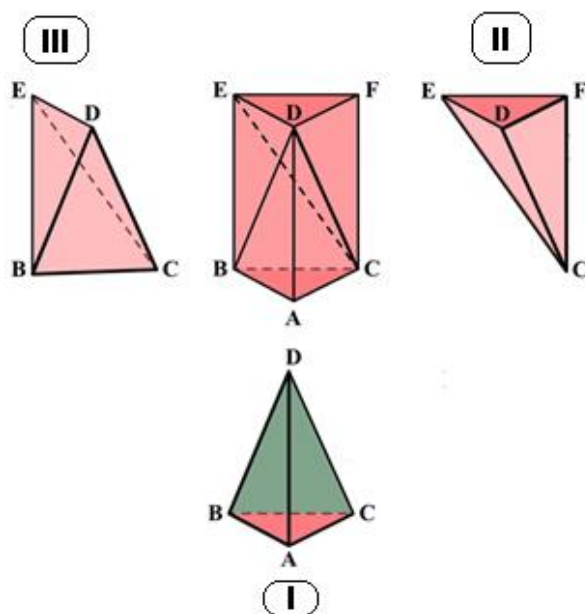
- **Área lateral (A_l)** – é a soma das áreas das faces laterais
- **Área da base (A_B)** – é a área do polígono da base
- **Área total (A_t)** – é a soma da área lateral com a área da base
-

$$A_t = A_l + A_B$$

Volume de uma pirâmide

Podemos obter o volume da pirâmide relacionando-a com o prisma.

Consideremos um prisma **ABCDEF** de base triangular. Decompomos o prisma em três pirâmides triangulares .



Podemos observar que as pirâmides **I** e **II** têm bases congruentes ($\triangle ABC \cong \triangle EDF$) e alturas iguais ($AD = CF$). Portanto, as pirâmides **I** e **II** têm mesmo volume.

Note também que as pirâmides **II** e **III** têm bases congruentes ($\triangle BCE \cong \triangle CEF$), pois cada uma delas é a metade do paralelogramo **BCFE**, e alturas iguais, correspondente à distância do vértice **D** ao plano **BCFE** . Logo, as pirâmides **II** e **III** têm mesmo volume. Se $V_I = V_{II}$ e $V_{II} = V_{III}$, então, $V_I = V_{II} = V_{III}$ e, portanto, as três pirâmides têm volumes iguais.

Com isso, concluímos que o prisma triangular **ABEFC** é composto de três pirâmides de **mesmo** volume, ou seja $V_{\text{prisma}} = 3 \cdot V_{\text{pirâmide}}$

Se, $V_{\text{prisma}} = 3 \cdot V_{\text{pirâmide}}$,

$$\text{então, } V_{\text{pirâmide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3} .$$

Como já vimos anteriormente que $V_{\text{prisma}} = \text{área da base} \times \text{altura}$,

então, $V_{\text{pirâmide}} = \frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3}$

Concluindo,

O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela medida da altura.

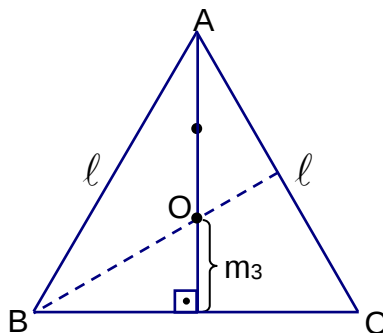
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

É importante observar que se quiséssemos encher de água um vasilhame em **forma de um prisma**, com um vasilhame em **forma de uma pirâmide** de **mesma base e altura** do prisma, precisaríamos enchê-lo totalmente **três vezes**.

Apótemas dos principais polígonos

Triângulo Equilátero:

Considere um triângulo equilátero ABC de lado ℓ . O ponto O é o centro do triângulo equilátero, que é o baricentro (encontro das três medianas).



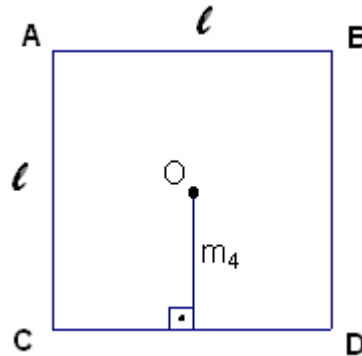
O apótema da base é igual à terça parte da altura do triângulo equilátero.

$$m_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$m_3 = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{6}$$

Quadrado:

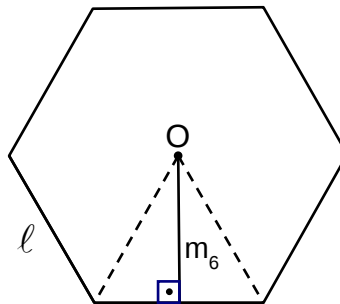
Considere um quadrado ABCD de lado ℓ . O ponto O é o centro do quadrado, portanto a distância do ponto O ao lado CD, por exemplo, é igual à metade da medida do lado do quadrado.



$$m_4 = \frac{\ell}{2}$$

Hexágono Regular:

Considere um hexágono regular de lado ℓ . O ponto O é o centro do hexágono. A distância do ponto O a qualquer um dos lados, é igual à altura de um triângulo equilátero de lado igual ao do hexágono.



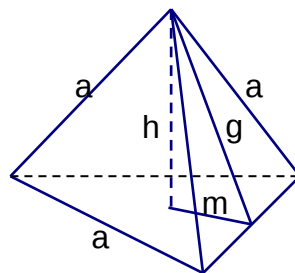
$$m_6 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Tetraedro

Tetraedro é toda pirâmide de base triangular.

Tetraedro regular – é a pirâmide triangular em que todas as arestas são congruentes, nesse caso cada face é um triângulo equilátero.

Elementos do tetraedro regular



- **Apótema da pirâmide (g)** – é a altura do triângulo equilátero

$$g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- **Apótema da base (m)** – o ponto O é o centro do triângulo equilátero, que é o baricentro (encontro das três medianas). O apótema da base é igual a $\frac{1}{3}$ da altura do triângulo equilátero (g).

$$m = \frac{1}{3} \cdot g$$
$$m = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

- **Altura (h)**

Usando o Teorema de Pitágoras temos:

$$g^2 = h^2 + m^2$$

$$h^2 = g^2 - m^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}$$

$$h^2 = \frac{24a^2}{36}$$

$$h = \sqrt{\frac{24a^2}{36}}$$

$$h = \frac{2a\sqrt{6}}{6}$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Áreas

- **Área da base (S_B)**

É igual a área de um triângulo equilátero

$$A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

- **Área total (S_t)**

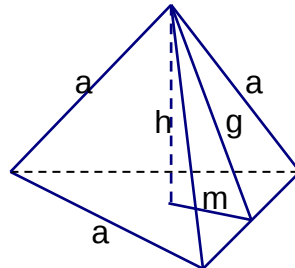
A área total do tetraedro regular é igual a quatro vezes a área de uma face (triângulo equilátero)

$$A_t = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_t = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

Volume do tetraedro regular

Dado um tetraedro regular de aresta a , temos:



$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad \text{e} \quad A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{18}}{36}$$

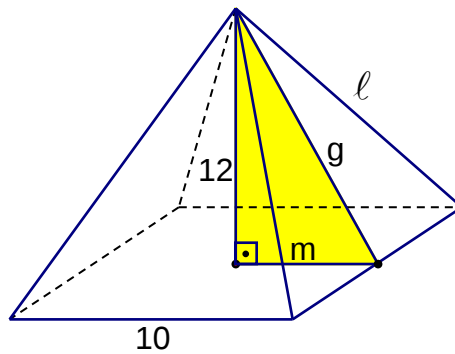
$$V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{36}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Exercícios resolvidos

1. Em uma **pirâmide quadrangular** regular a aresta da base mede 10cm e a altura, 12 cm. Determine a medida:
 - a) do apótema da base (m)
 - b) do apótema da pirâmide (g)
 - c) da aresta lateral (ℓ)
 - d) da área da base (A_B)
 - e) da área lateral (A_ℓ)
 - f) da área total (A_T)

g) do volume (V)



Resolução:

a) $m_4 = \frac{\ell}{2} \Rightarrow m = \frac{10}{2} \Rightarrow m = 5 \text{ cm}$

b) $g^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

$$g = \sqrt{169} \Rightarrow g = 13 \text{ cm}$$

c) $\ell^2 = g^2 + 5^2 = 169 + 25 = 194$

$$\ell = \sqrt{194} \text{ cm}$$

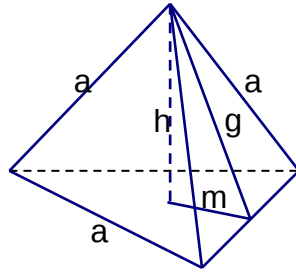
d) $A_B = \ell^2 \Rightarrow A_B = 10^2 \Rightarrow A_B = 100 \text{ cm}^2$

e) $A_\ell = 4 \cdot \left(\frac{10 \cdot 13}{2} \right) \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot \frac{130}{2} = 4 \cdot 65 \Rightarrow A_\ell = 260 \text{ cm}^2$

f) $A_T = A_\ell + A_B \Rightarrow A_T = 260 + 100 \Rightarrow A_T = 360 \text{ cm}^2$

2. Sabendo que a soma de todas das medidas de todas as arestas de um tetraedro regular mede 12 cm, determine a medida:

- de sua aresta
- do apótema da base
- do apótema do tetraedro
- da área da base
- da área total
- do volume



Resolução

$$\text{a) } a = \frac{12}{6}$$

$$a = 2\text{cm}$$

$$\text{b) } m = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$m = \frac{2\sqrt{3}}{6}$$

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{cm}$$

$$\text{c) } g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$g = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$g = \sqrt{3}\text{cm}$$

$$\text{d) } A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_B = \frac{2^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_B = \sqrt{3}\text{cm}$$

$$\text{e) } A_t = a^2\sqrt{3}$$

$$A_t = 2^2\sqrt{3}$$

$$A_t = 4\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$\text{f) } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

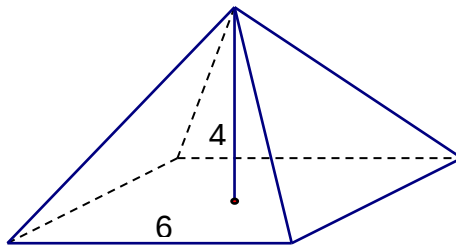
$$V = \frac{2^3\sqrt{2}}{12}$$

$$V = \frac{8\sqrt{2}}{12} \Rightarrow \text{Simplificou-se por 4}$$

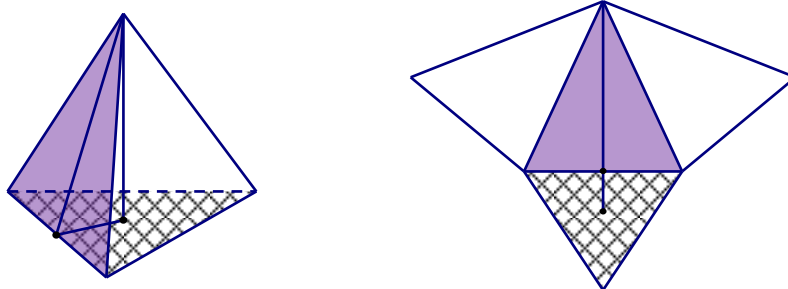
$$V = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$$

Exercícios

01. Uma pirâmide quadrangular regular tem 4m de altura e a aresta da base mede 6m, calcular a medida do seu volume.

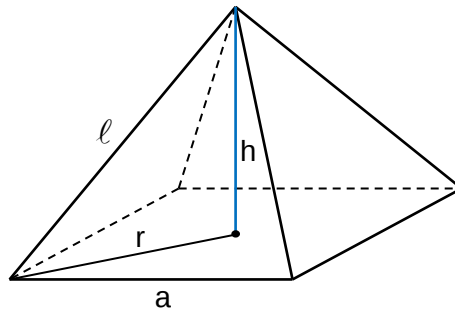


02. O apótema de uma pirâmide triangular regular mede 5 cm e a área lateral dessa pirâmide é igual a 15 cm^2 . Determine:

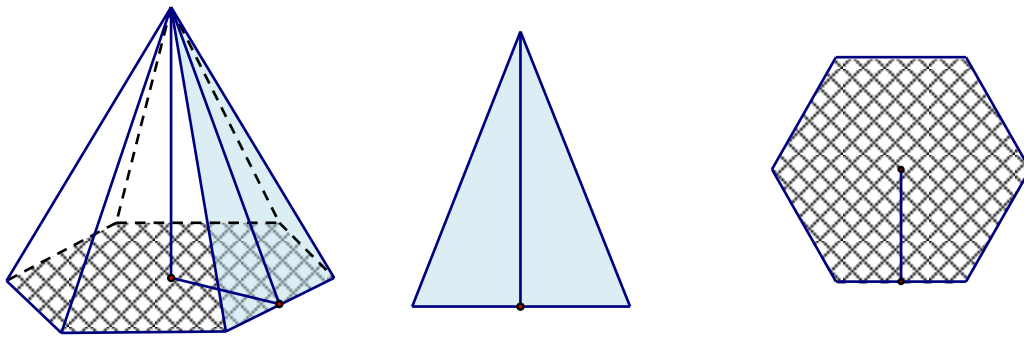


- a) A medida da aresta da base
- b) A medida da aresta lateral
- c) A área total
- d) A altura dessa pirâmide

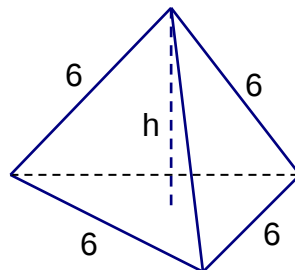
03. A altura de uma pirâmide quadrangular regular é 16 m e sua aresta lateral mede 20 m. Calcule a medida da aresta da base e o seu volume.



04. Calcular o volume de uma pirâmide regular hexagonal cuja aresta da base mede 8 cm e a aresta lateral, $4\sqrt{5}cm$.



05. A aresta de um tetraedro regular mede 6 cm. Calcular a medida h da altura e a área total desse tetraedro.



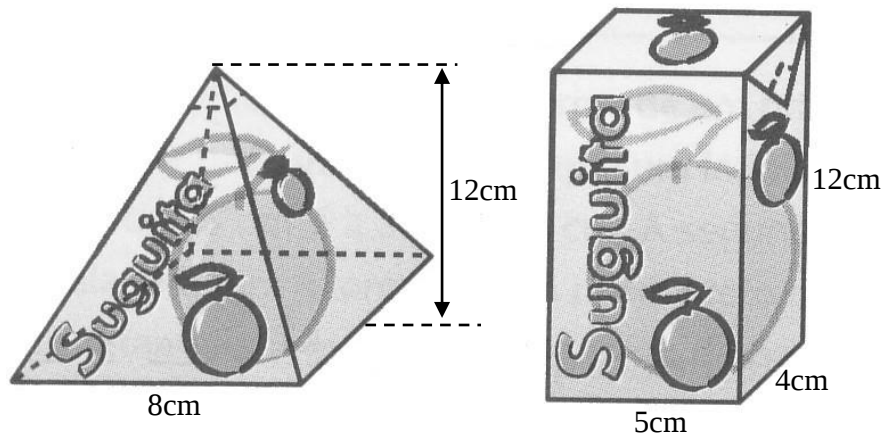
06. A altura de um tetraedro regular mede $6\sqrt{6} cm$. Calcular o apótema desse tetraedro e sua área total.

07. A base de um tetraedro regular tem uma área de $3\sqrt{3}cm^2$. Calcule o volume do tetraedro.

08. Um professor foi ao mercado comprar suco para seu filho levar em sua merendeira. Chegando lá avistou o seguinte cartaz:

Oferta do dia!

Suco de laranja em duas embalagens:



Uma das embalagens tem o formato de uma pirâmide quadrangular regular e custa R\$1,28 a unidade. A outra tem o formato de um paralelepípedo retângulo e custa R\$1,20 a unidade.

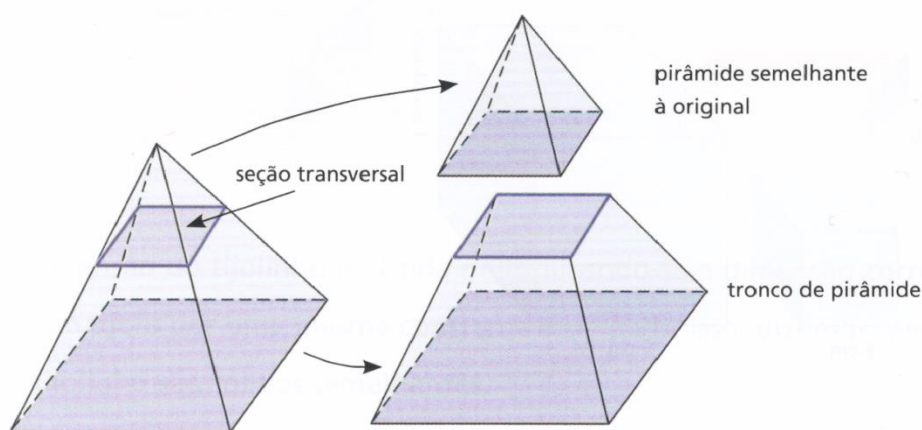
Analisando o cartaz e levando em consideração as medidas indicadas e o preço cobrado por cada embalagem, podemos afirmar:

- a) É mais vantajoso comprar a embalagem piramidal.
- b) É mais vantajoso comprar a embalagem em forma de paralelepípedo.
- c) É indiferente optar por qualquer embalagem.
- d) Se a altura da pirâmide fosse igual a 11cm as duas embalagens teriam a mesma capacidade.
- e) A capacidade da embalagem em forma de paralelepípedo é maior do que a em forma de pirâmide.

Secção transversal e Tronco de pirâmide

A secção determinada numa pirâmide por um plano paralelo à base a uma distância **d** do vértice é **chamada secção transversal**.

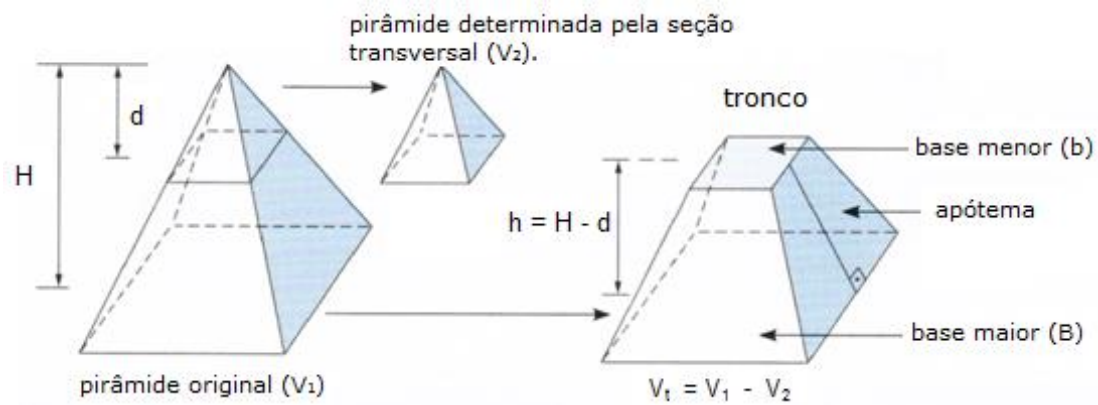
Uma secção transversal divide a pirâmide em duas partes: uma pirâmide semelhante à original e um poliedro chamado **tronco de pirâmide** de bases paralelas.



Tronco de pirâmide regular

É o tronco obtido de uma pirâmide regular

- **As bases** são polígonos regulares semelhantes.
- **A base maior (B)** é a base da pirâmide e a **base menor (b)** é a secção transversal.
- **Altura do tronco (h)** é a distância entre os planos das bases.
- **As faces laterais** são **trapézios isósceles** equivalentes.
- **A altura** de um desses **trapézios** chama-se **apótema do tronco**.



- **Área lateral do tronco (A_l)**

É a soma das áreas dos trapézios

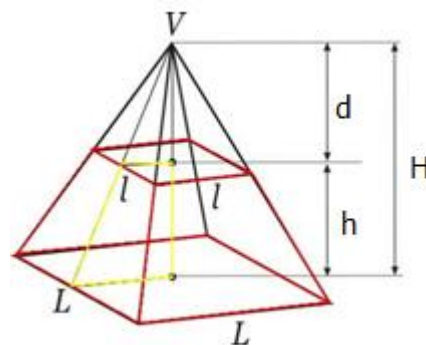
- **Área total do tronco (A_t)**

É a soma da área lateral com a área das duas bases

$$A_t = A_l + A_B + A_b$$

Razão de semelhança

Com a secção, a nova pirâmide e a pirâmide primitiva (original) têm a mesma natureza, os ângulos ordenadamente congruentes e os elementos lineares (arestas das bases, arestas laterais, alturas, etc) são proporcionais. Dizemos então que eles são semelhantes.



Razão de semelhança entre os elementos lineares

$$\frac{L}{l} = \frac{H}{d} = \frac{G}{g}$$

Razão de semelhança entre as áreas

- A razão entre as **áreas** é igual ao **quadrado** da razão de semelhança

Área da base

$$\frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{H}{d}\right)^2 = \left(\frac{L}{l}\right)^2 = \dots = (k)^2$$

Área lateral

$$\frac{A_L}{A_l} = \left(\frac{G}{g}\right)^2 = \left(\frac{L}{l}\right)^2 = \dots = (k)^2$$

Razão de semelhança entre os volumes

- A razão entre os **volumes** é igual ao **cuubo** da razão de semelhança:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{H}{d}\right)^3 = \left(\frac{L}{l}\right)^3 = \dots = (k)^3$$

Volume do tronco de pirâmide (V_t)

O volume do tronco de pirâmide de bases paralelas é dado pela diferença entre o volume da pirâmide original (V_1) e o volume da pirâmide determinada pela seção transversal (V_2).

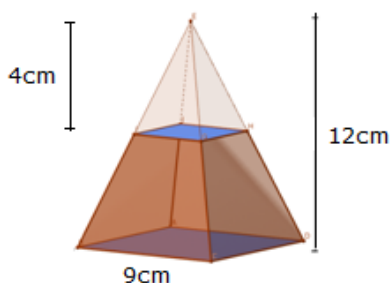
$$V_t = V_1 - V_2$$

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H - \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot d$$

Exercícios Resolvidos

1. Uma pirâmide quadrangular regular de altura 12cm e aresta da base 9cm, foi seccionada por um plano paralelo a base e distante do vértice 4 cm. Determine o volume do tronco de pirâmide obtido por essa secção.

Resolução:



Sabendo que $H = 12$ cm, $L = 9$ cm, e $d = 4$ devemos fazer a razão de semelhança para descobrir o valor da aresta da base menor.

$$\frac{H}{d} = \frac{L}{l} \Rightarrow \frac{12}{4} = \frac{9}{l} \Rightarrow 12l = 36 \Rightarrow l = 3\text{cm}$$

O volume do tronco de pirâmide (V_t) é igual ao volume da pirâmide original (V_1) menos o volume da pirâmide obtida pela secção (V_2).

$$V_1 = \frac{A_B \cdot H}{3}$$

$$V_2 = \frac{S_b \cdot d}{3}$$

$$V_1 = \frac{L^2 \cdot H}{3}$$

$$V_2 = \frac{l^2 \cdot d}{3}$$

$$V_1 = \frac{9^2 \cdot 12}{3}$$

$$V_2 = \frac{3^2 \cdot 4}{3}$$

$$V_1 = 324\text{cm}^3$$

$$V_2 = 12\text{cm}^3$$

Logo o volume do tronco é:

$$V_t = V_1 - V_2 \Rightarrow V_t = 324 - 12 \Rightarrow V_t = 312\text{cm}^3$$

Também podemos calcular o volume do tronco usando a fórmula:

$$V_t = \frac{h_t}{3} \cdot (A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b)$$

onde h_t é a altura do tronco.

Essa fórmula demonstraremos no final da apostila para maior ilustração.

Se $H = 12 \text{ cm}$ e $d = 4 \text{ cm}$, então:

$$h_t = H - d \Rightarrow h_t = 8 \text{ cm}$$

$$A_B = L^2 \Rightarrow A_B = 9^2 \Rightarrow A_B = 81$$

$$A_b = l^2 \Rightarrow A_b = 3^2 \Rightarrow A_b = 9$$

Usando a fórmula do volume do tronco, temos:

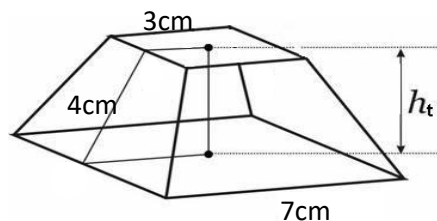
$$V_t = \frac{8}{3} \cdot (81 + \sqrt{81 \cdot 9} + 9) \Rightarrow V_t = \frac{8}{3} \cdot (81 + 9 \cdot 3 + 9)$$

$$V_t = \frac{8}{3} \cdot 117 \Rightarrow V_t = 312 \text{ cm}^3$$

Em geral, é mais adequado obter o volume do tronco pela subtração dos volumes das pirâmides em vez de decorar a fórmula, mas fica ao seu critério.

2. Calcule a área lateral e a área total de um tronco de pirâmide quadrangular regular de bases paralelas em que a aresta da base maior mede 7cm, aresta da base menor 3cm e a altura de um dos trapézios laterais é 4cm.

Resolução:



Sabendo que $L = 7 \text{ cm}$, $l = 3 \text{ cm}$ e $g = 4 \text{ cm}$, onde g é a altura de uma das faces laterais, ou seja, o apótema do tronco.

Área da base menor:

$$A_b = l^2 \Rightarrow A_b = 9 \text{ cm}^2$$

\

Área da base maior:

$$A_B = L^2 \Rightarrow A_B = 49 \text{ cm}^2$$

\

Área lateral:

$$A_l = 4 \cdot \frac{(L+l) \cdot g}{2} \Rightarrow A_l = 4 \cdot \frac{(7+3) \cdot 4}{2} \Rightarrow A_l = 80 \text{ cm}^2$$

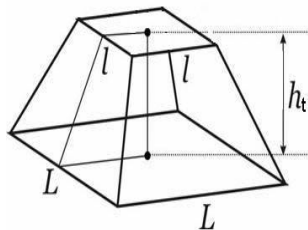
Área total:

$$A_t = A_b + A_B + A_l \Rightarrow A_l = 9 + 49 + 80 \Rightarrow A_l = 138\text{cm}^2$$

Exercícios

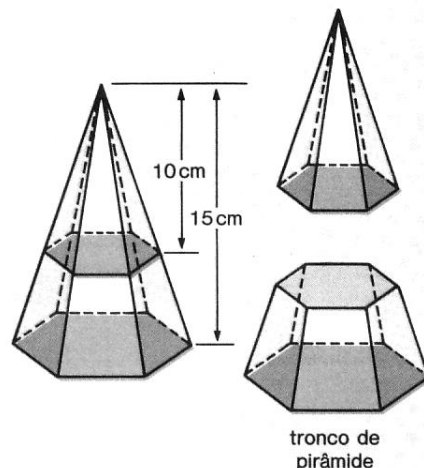
1. Uma pirâmide que tem por base um quadrado de lado 4 cm, tem 10 cm de altura. A que distância do vértice deve passar um plano paralelo às bases, de modo que a secção transversal tenha uma área de 4 cm^2 .

2. As bases de um tronco de pirâmide regular são quadradas de lados 2 cm e 8 cm, respectivamente. A aresta lateral do tronco mede 5 cm. Calcule a altura, a área lateral e a área total do tronco.



3. A figura mostra uma pirâmide que, seccionada por um plano paralelo à base, fica decomposta em duas partes: uma pirâmide menor e um sólido chamado tronco de pirâmide. Se a área da base da pirâmide primitiva é igual a 54cm^2 , calcule:

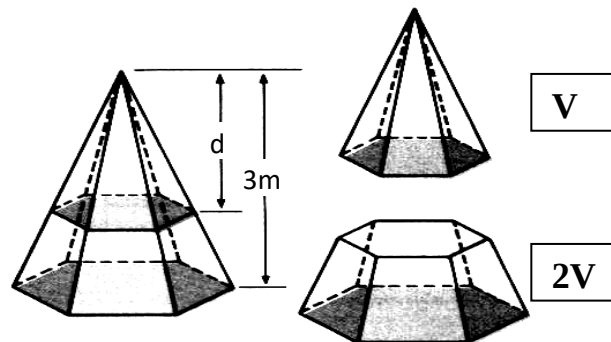
- a) a área da secção;
- b) o volume do tronco.



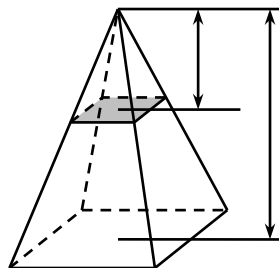
5. A figura abaixo mostra uma pirâmide que, seccionada por um plano paralelo à base, fica decomposta em duas partes: uma pirâmide menor e um sólido denominado tronco de pirâmide.

A que distância do vértice deve ser seccionada essa pirâmide para que o volume do tronco seja o dobro do volume da pirâmide menor?

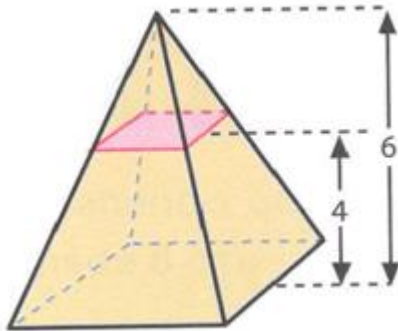
- a) 1m
- b) $\sqrt[3]{6}$ m
- c) $\sqrt[3]{9}$ m
- d) 2m



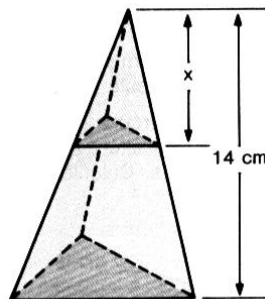
6. A figura abaixo representa uma pirâmide quadrangular regular, cuja aresta da base mede 9cm e a altura 15cm. Calcule a área da secção transversal feita a 5cm do vértice;



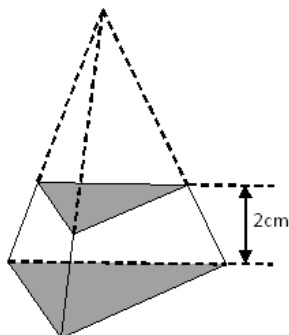
7. Uma pirâmide quadrangular de altura 6cm e volume 108cm^3 é seccionada por um plano paralelo à sua base que dista 4cm da mesma. Calcule o volume da pirâmide menor obtida por este "corte".



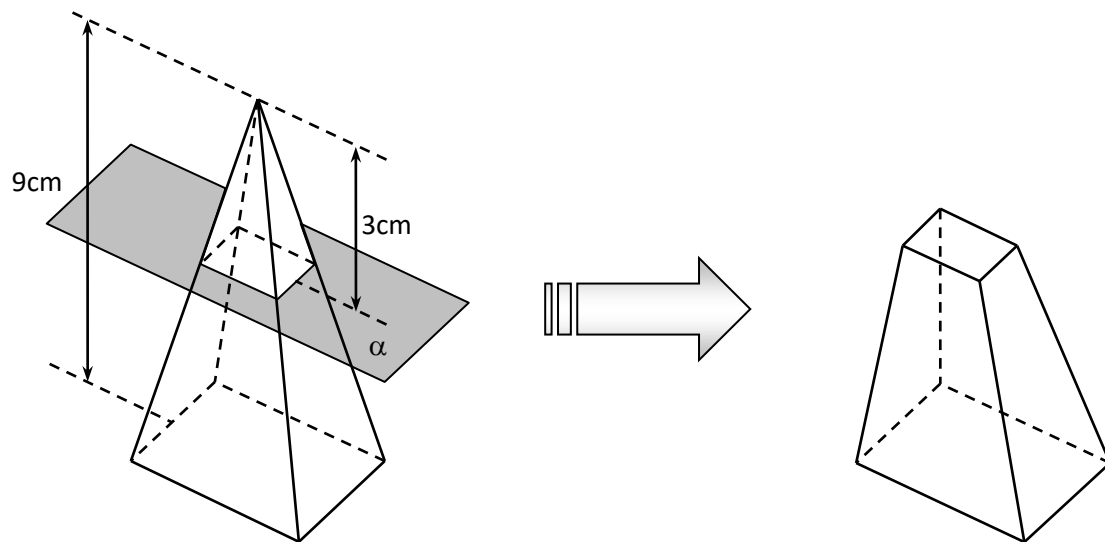
8. Na pirâmide da figura abaixo, as áreas da base e da secção transversal (paralela à base) são respectivamente iguais a 98cm^2 e 18cm^2 . Calcule o valor de x .



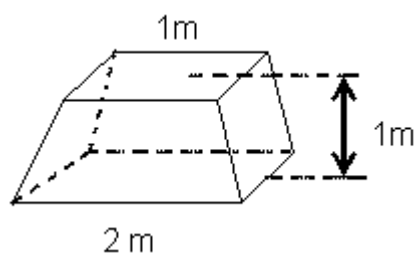
09. Um tronco de pirâmide regular tem como bases triângulos equiláteros, cujos lados medem, 2cm e 3cm. Calcule o volume desse tronco sabendo que sua altura é de 2cm.



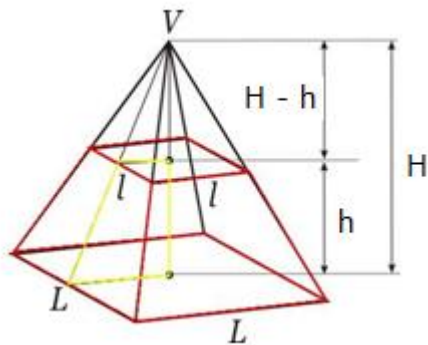
10. Uma pirâmide quadrangular tem 9cm de altura. Um plano α , paralelo à base, secciona a pirâmide a 3cm do vértice, originando uma nova pirâmide cuja base tem 20cm^2 . Qual o volume do tronco de pirâmide obtido?



11. Um engenheiro está projetando uma sapata de concreto em forma de tronco de pirâmide regular, com as dimensões indicadas na figura. Sabendo que em 1m^3 de concreto gastam-se 6 sacos de cimento, determine quantos sacos serão gastos para fazer essa sapata.



Demonstração algébrica da fórmula do volume de Tronco de Pirâmide



$$V_T = \frac{1}{3}A_B H - \frac{1}{3}A_b(H - h)$$

$$V_T = \frac{1}{3}[A_B H - A_b(H - h)]$$

$$V_T = \frac{1}{3}[A_B H - A_b H + A_b h]$$

$$V_T = \frac{1}{3}[H(A_B - A_b) + A_b h] \quad (I)$$

Utilizando a razão de semelhança entre as áreas, podemos determinar o valor da altura H em função de A_B , A_b e h :

$$\frac{A_B}{A_b} = \frac{H^2}{(H - h)^2}$$

$$\frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_b}} = \frac{H}{H - h}$$

$$H \sqrt{A_b} = (H - h) \sqrt{A_B}$$

$$H \sqrt{A_b} = H \sqrt{A_B} - h \sqrt{A_B}$$

$$H \sqrt{A_B} - H \sqrt{A_b} = h \sqrt{A_B}$$

$$H (\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}) = h \sqrt{A_B}$$

$$H = \frac{h \sqrt{A_B}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$V_T = \frac{1}{3} [H (A_B - A_b) + A_b h]$$

$$V_T = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{h \sqrt{A_B}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}} \right) (A_B - A_b) + A_b h \right]$$

$$V_T = \frac{1}{3} \left[\frac{(A_B - A_b)}{(\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b})} \cdot h \sqrt{A_B} + A_b h \right]$$

$$V_T = \frac{1}{3} \left[\frac{(A_B - A_b)}{(\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b})} \cdot \frac{(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b})}{(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b})} \cdot h \sqrt{A_B} + A_b h \right]$$

$$V_T = \frac{1}{3} \left[\frac{(A_B - A_b) \cdot (\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b})}{(A_B - A_b)} \cdot h \sqrt{A_B} + A_b h \right]$$

$$V_T = \frac{1}{3} [(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}) \cdot h \sqrt{A_B} + A_b h]$$

$$V_T = \frac{1}{3} h [\sqrt{A_B} \cdot \sqrt{A_B} + \sqrt{A_b} \cdot \sqrt{A_B} + A_b]$$

Assim, chegamos a fórmula do cálculo do volume do tronco de pirâmide:

$$V_T = \frac{1}{3} h [A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b]$$

Bibliografia

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. São Paulo, Ática, 2014.

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva. São Paulo, Moderna 2014.

BARROSO, Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva, 2010.

MUNOZH, Aida, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Sites:

<http://www.somatematica.com.br>

Escola 24 horas - <http://www.escola24h.com.br>

<http://www.matematica.com.br>