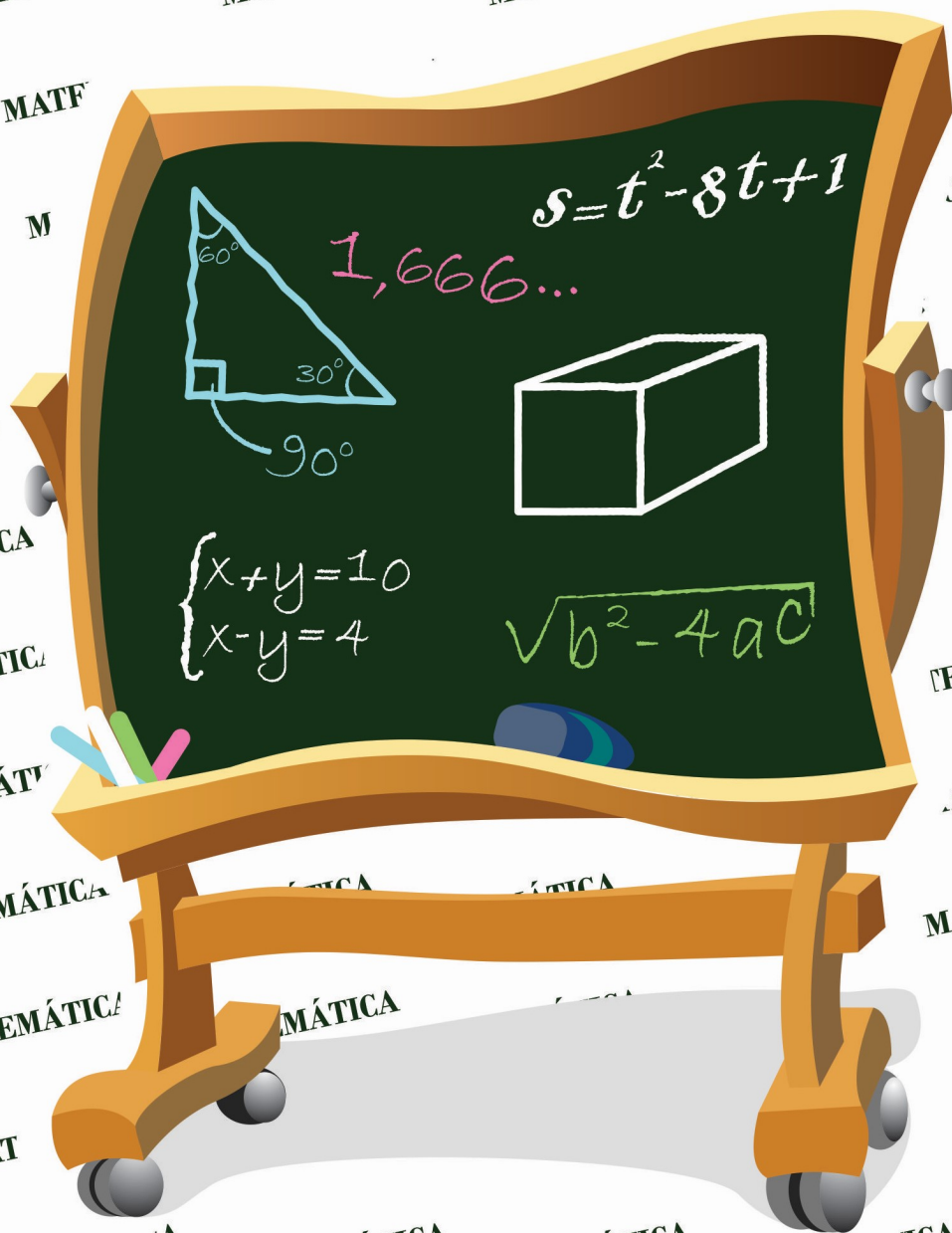


MATEMÁTICA



1º ANO

1ª etapa

Apostila I

Matemática Básica

(Revisando Radiciação)

COORDENAÇÃO
SERGIO LOPES RODRIGUES

RADICIAÇÃO

Radiciação é o inverso da potenciação.

Raiz Quadrada

Nos cursos anteriores, já estudamos que:

$$\sqrt{81} = 9 \text{ porque } 9^2 = 9 \cdot 9 = 81$$

Ou seja, para acharmos a raiz quadrada de oitenta e um ($\sqrt{81}$), devemos nos perguntar qual o número que, multiplicado por ele mesmo, resulta 81.

A resposta é 9, pois $9 \cdot 9 = 81$

Observações:

A raiz quadrada de um número positivo será sempre um número positivo. Não poderá ser um número negativo porque a resposta deve ser única.

A raiz quadrada de um número negativo como, por exemplo, $\sqrt{-81}$ não existe no conjunto dos números reais, porque não existe número real que elevado ao quadrado resulta 81.

Exemplo prático:

Determine o lado do quadrado de área igual a 49 cm^2 .

Conhecendo a área do quadrado, podemos determinar a medida de seu lado.

$$A = \ell^2$$

$$49 = \ell^2$$

$$\ell^2 = 49$$

$$\ell = \sqrt{49}$$

$$\ell = 7$$

Resposta: 7 cm



Raiz Cúbica

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ porque } 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Ou seja, para acharmos a raiz cúbica de oito $\sqrt[3]{8}$, devemos nos perguntar qual o número que, multiplicado por ele mesmo três vezes, resulta 8.

A resposta é 2, pois $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Observe que:

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ pois } (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

Observações:

- A raiz cúbica de um número real **positivo** é um número **positivo**.
- A raiz cúbica de um número real **negativo** é um número **negativo**.

Lembramos que os elementos de $\sqrt[n]{x} = b$ são assim denominados:

$\sqrt{}$ = sinal do radical

n = índice do radical ou índice da raiz

x = radicando

b = resultado da raiz

Observação:

Quando o índice é 2, usualmente não se escreve.

Exemplo:

$$\sqrt[2]{49} = \sqrt{49}$$

Raiz Enésima

A raiz de **índice par** (raiz quarta, raiz sexta, raiz oitava, etc.) é definida de maneira semelhante à raiz quadrada.

Exemplo:

$$\sqrt[4]{16} = 2, \text{ porque } 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$\sqrt[4]{-16}$ não existe no conjunto dos números reais, porque não existe número real que elevado à quarta potência, dê -16

A raiz de **índice ímpar** (raiz quinta, raiz sétima, raiz nona, etc.) é definida de maneira semelhante à raiz cúbica.

$$\sqrt[5]{243} = 3, \text{ porque } 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

$$\sqrt[5]{-243} = -3, \text{ porque } (-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$$

Exemplo prático:

Determine a aresta de um cubo de volume igual a 125 cm^3 .

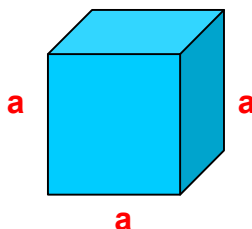
$$V = a^3$$

$$125 = a^3$$

$$a^3 = 125$$

$$a = \sqrt[3]{125}$$

$$a = 5$$



Resposta: 5 cm

Expoente Fracionário

Os **radicais** podem ser representados por uma potência com **expoente fracionário**.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ sendo } n \text{ um número natural maior que } 1.$$

Exemplos:

$$\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}}$$

(O numerador da fração é o expoente do radicando e o denominador é o índice do radical)

$$\sqrt[4]{11} = 11^{\frac{1}{4}}, \quad \sqrt{5^7} = 5^{\frac{7}{2}}$$

Essa propriedade pode **facilitar o cálculo** de uma raiz.

Exemplos:

$$\sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8, \quad \sqrt[6]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{6}} = 5^2 = 25$$

Propriedades da Radiciação

Propriedade 1:

Veja:

$$\sqrt[6]{7^6} = 7^{\frac{6}{6}} = 7^1 = 7$$

$$\sqrt{13^2} = 13^{\frac{2}{2}} = 13^1 = 13$$

Se a é um número positivo e n é um número diferente de zero, então
$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Exemplos:

$$\sqrt[3]{7^3} = 7$$

$$\sqrt[7]{15^7} = 15$$

$$\sqrt{27^2} = 27$$

Observação:

Quando a base do radicando for negativa, devemos ficar atento.

Índice par

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5, \quad \text{então } \sqrt{(-5)^2} = 5$$

Exemplos:

$$\sqrt[5]{(-9)^5} = 9$$

$$\sqrt[3]{(-11)^3} = 11$$

Índice ímpar

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\text{Então } \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

Exemplos:

$$\sqrt[5]{(-8)^5} = -8$$

$$\sqrt[3]{(-12)^3} = -12$$

Propriedade 2:

Veja:

$$\sqrt[12]{5^8} = 5^{\frac{8}{12}} = 5^{\frac{8:4}{12:4}} = 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

$$\sqrt[10]{81^5} = 81^{\frac{5}{10}} = 81^{\frac{5:5}{10:5}} = 81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$$

Quando dividimos o índice da raiz e o expoente do radicando pelo mesmo número natural diferente de zero, obtemos um radical equivalente ao primeiro.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$$

Propriedade 3:

A raiz de um produto é igual ao produto das raízes dos fatores desse produto.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[3]{27 \cdot 125} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\sqrt{81 \cdot 100} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{100} = 9 \cdot 10 = 90$$

$$\sqrt{4900} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 7 \cdot 10 = 70$$

Alguns cálculos podem ser facilitados usando a mesma propriedade.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Exemplos:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 50} = \sqrt{100} = 10$$

Propriedade 4

A raiz do quociente é igual ao quociente das raízes dos termos.

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \text{ ou } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplos:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$$

Observação:

As propriedades servem para facilitar nossos cálculos, portanto devemos escolher a mais conveniente.

Extração de fatores do radicando

Quando o radicando tem fatores com expoentes iguais ou maiores que o índice da raiz, esses fatores podem ser extraídos do radicando. Veja os exemplos:

$$\sqrt{2^8 \cdot 5^4 \cdot 7} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 7} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7} = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{7} = 50\sqrt{7}$$

Observe que como queremos extrair a raiz quadrada, o radicando que está ao quadrado sai do radical.

Outro exemplo:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3} &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{5^3} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt[3]{3^2} \\ &= 60\sqrt[3]{3^2} \end{aligned}$$

Observe que como queremos extrair a raiz cúbica, o radicando que está ao cubo sai do radical.

Simplificação de Radicais

Determine a forma simplificada de $\sqrt{1440}$

Primeiro devemos fatorar 1440 e depois aplicar as propriedades dos radicais.

Fatorando 1440

1440	2
720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5

$$1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Usando as propriedades, temos:

$$\sqrt{1440} = \sqrt{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 5} = 12\sqrt{10}$$

Em alguns casos, podemos calcular mentalmente algumas raízes.

Exemplo:

Determine $\sqrt{72}$.

Como a raiz é quadrada, decompomos 72 num produto, de forma que um dos fatores seja um quadrado perfeito.

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

RADICAIS SEMELHANTES

Radicais semelhantes são os que têm o mesmo índice e o mesmo radicando

Exemplos:

a) $3\sqrt{7}$ e $5\sqrt{7}$ semelhante

b) $\sqrt[3]{11}$ e $-3\sqrt[3]{11}$ são semelhantes

Os radicais $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{5}$ não são semelhantes, porque têm índices do radical diferente.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE RADICAIS

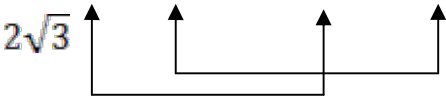
Só podemos adicionar e subtrair radicais semelhantes.

Para adicionar ou subtrair radicais semelhantes, procedemos como na redução de termos semelhantes de uma soma algébrica.

Exemplos:

$$a) 4\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (4 + 7)\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

$$b) 3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = (3 - 7)\sqrt{5} = -4\sqrt{5}$$

$$c) 11\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3} = (11 - 4)\sqrt{2} + (3 - 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$


Há casos que os radicais tornam-se semelhantes depois de simplificados.

Exemplos:

$$a) 8\sqrt{3} + \sqrt{12} = 8\sqrt{3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} = 8\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$b) \sqrt{27} + 2\sqrt{50} - \sqrt{48} - \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 3} + 2\sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \sqrt{2 \cdot 3^2}$$

$$=$$

$$3\sqrt{3} + 2 \cdot 5\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{3} + 10\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

A racionalização de denominadores consiste na obtenção de uma fração com denominador racional, equivalente a uma anterior, que possuía um ou mais radicais em seu denominador.

Para racionalizar o denominador de uma fração devemos multiplicar os termos desta fração por uma expressão com radical, denominado **fator racionalizante**, de modo a obter uma nova fração equivalente com denominador sem radical.

Observando a fração $\frac{7}{\sqrt{5}}$ vemos que seu denominador é um número em forma de radical.

Agora vamos multiplicar o numerador e o denominador desta fração por $\sqrt{5}$, obtendo uma fração equivalente.

Lembramos que uma fração não se altera quando o numerador e o denominador são multiplicados pelo mesmo número diferente de zero.

$$\frac{7 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

Observe que a fração equivalente $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ possui o denominador sem radical.

A essa transformação, damos o nome de **racionalização de denominadores**.

$$\sqrt{a} \text{ é o fator racionalizante de } \sqrt{a}, \text{ pois } \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$$

Exemplos:

Racionalize os denominadores das frações:

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{Fator racionalizante : } \sqrt{3} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{b) } \frac{14}{\sqrt{7}} \quad \text{Fator racionalizante : } \sqrt{7} \longrightarrow \frac{14}{\sqrt{7}} = \frac{27 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{27 \cdot 7}{\sqrt{7^2}} = \frac{14\sqrt{7}}{7} = 2\sqrt{7}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \quad \text{Fator racionalizante: } \sqrt{3} \longrightarrow \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{12 \cdot 3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{36}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Observação:

Alguns concursos exigem que o aluno saiba o valor aproximado de algumas raízes, como por exemplo:

$$\sqrt{2} \cong 1,41$$

$$\sqrt{3} \cong 1,73$$

$$\sqrt{5} \cong 2,23$$

$$\sqrt{6} \cong 2,44$$

$$\sqrt{7} \cong 2,64$$

Exercícios

1) Determine as raízes abaixo:

a) $\sqrt{1024}$

b) $\sqrt{864}$

c) $\sqrt{8 \times 1000}$

d) $\sqrt{27000}$

e) $\sqrt{4 \times 0,01}$

f) $\sqrt{0,09}$

g) $\sqrt{0,0016}$

h) $\sqrt{0,0144}$

i) $\sqrt[3]{-27}$

j) $\sqrt[3]{24}$

l) $\sqrt[3]{0,027}$

m) $\sqrt[3]{81a^3b^3}$

n) $\sqrt{50x^4y^2}$

2) Simplifique a expressão $\sqrt{12} - \sqrt{50} + \sqrt{27} + \sqrt{200} =$

3) Considere a expressão $\sqrt{98} + \sqrt{75} - \sqrt{50} - \sqrt{108}$

a) Escreva a expressão citada em função de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$

b) Sabendo que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números irracionais, de valores aproximados 1,41 e 1,73, respectivamente, calcule o valor aproximado da expressão citada acima..

4) Determine os seguintes produtos.

a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{11}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

c) $\sqrt{2} (\sqrt{3} - \sqrt{5})$

d) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

e) $(\sqrt{5} + 1)$

5) Racionalize:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

d) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

e) $\frac{28}{\sqrt{7}}$

f) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

6) Um reservatório deve comportar 1728 litros ($1,728 \text{ m}^3$) de água e terá a forma de um cubo. Qual deve ser a medida mínima de sua aresta.

7) Um bairro do Rio de Janeiro tem $3.000.000 \text{ m}^2$ de área. Se o bairro tivesse a forma de um quadrado, então a medida de seus lados estaria entre.

a) 1700 m a 1800 m

b) 1600 m a 1700 m

c) 1800 m a 1900 m

d) 1500 m a 1600 m

Bibliografia

BARROSO, Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

FACHINI, Walter. Matemática; volume único. São Paulo, Saraiva, 1996.
GIOVANNI, José Rui; BONJORNIO, José Roberto. Matemática. São Paulo, FTD, 1992.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.
IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.
IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva, 2010.

MARCONDES, Carlos Alberto ET AL. Matemática. São Paulo, Ática, 2000.
MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática antes e depois. São Paulo, Saraiva, 2006.

MUNOZH, Aínda, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Sites:

<http://www.somatematica.com.br>

Escola 24 horas - <http://www.escola24h.com.br>

<http://www.matematica.com.br>