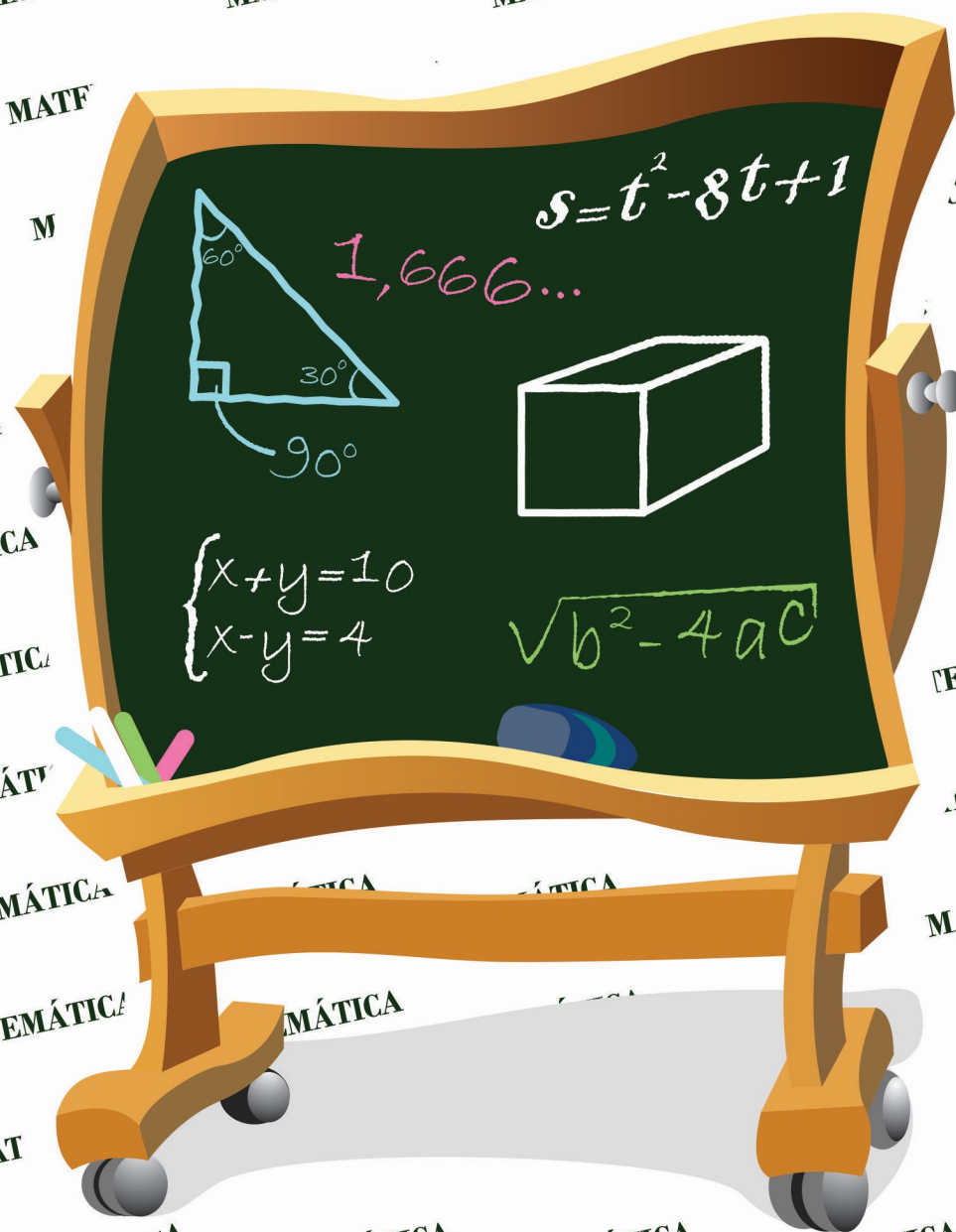


MATEMÁTICA



3º ANO

GEOMETRIA ESPACIAL

(prisma)

COORDENAÇÃO

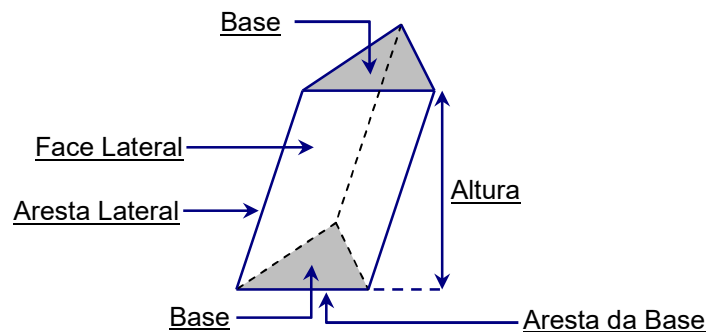
SERGIO LOPES RODRIGUES

GEOMETRIA ESPACIAL

Prisma

Prisma é todo poliedro formado por uma face superior e uma face inferior paralelas e congruentes, chamadas bases e outras formadas por paralelogramos, chamadas faces laterais.

Elementos de um prisma

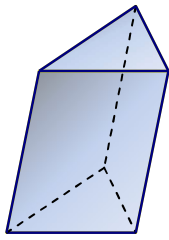


Classificação

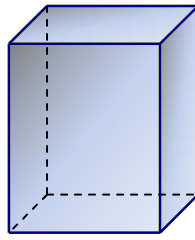
De acordo com o número de arestas da base, um prisma pode ser classificado em:

- Prisma triangular: quando as bases são triângulos;
- Prisma quadrangular: quando as bases são quadrangulares;
- Prisma pentagonal: quando as bases são pentágonos, e assim por diante.

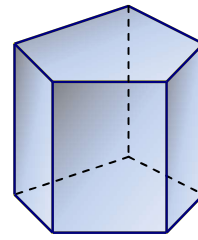
Exemplos



Prisma triangular



Prisma quadrangular

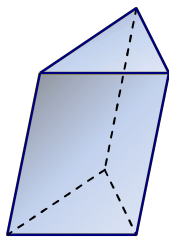


Prisma pentagonal

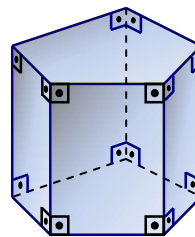
De acordo com a inclinação das arestas laterais, um prisma pode ser:

- Prisma reto: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos da base.
- Prisma oblíquo: quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

Exemplos:



Prisma Oblíquo



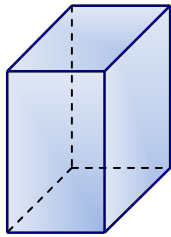
Prisma Reto

Podemos observar que em um prisma reto as faces laterais são retangulares.

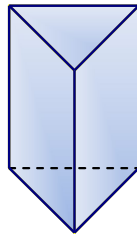
Prisma regular

É todo prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

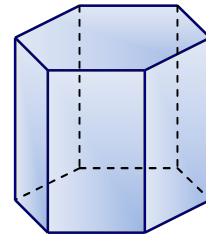
Observe alguns exemplos de prismas com suas respectivas classificações:



Prisma
Quadrangular Regular



Prisma
Triangular Regular



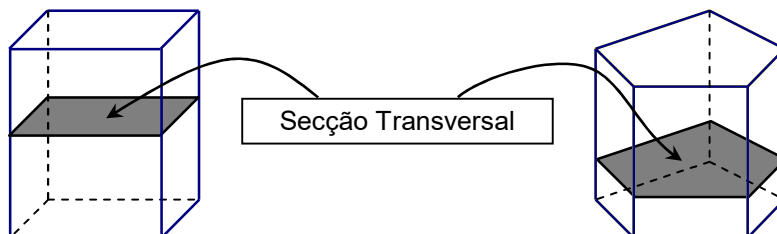
Prisma
Hexagonal Regular

Secção transversal de um prisma

Secção transversal é a região determinada pela intersecção do prisma com o plano paralelo ao plano da base.

Todas as secções transversais são congruentes

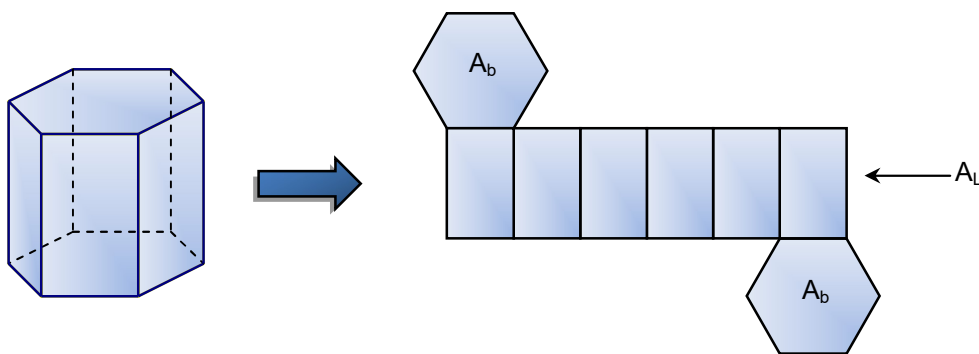
Exemplos



Área total do prisma

Para determinar a área total (A_t) do prisma, primeiro devemos calcular a sua área lateral (A_L). A área lateral é a soma de todas as áreas das faces laterais. Depois, somamos a área lateral com as áreas das bases (A_B).

$$A_t = A_L + 2A_B$$



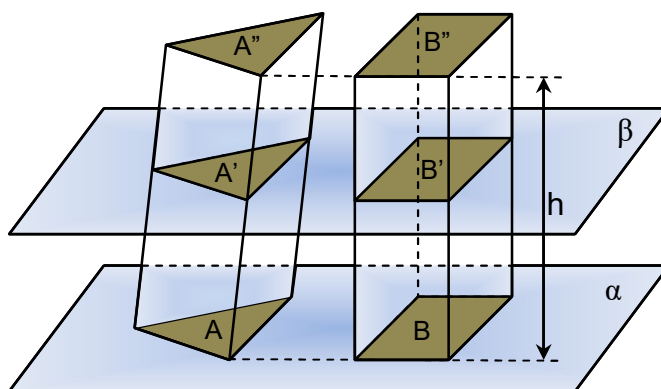
Volume do prisma

O volume do prisma é igual ao produto da área da base pela medida de sua altura.

$$V = A_B \cdot h$$

É importante observar que o volume do prisma depende exclusivamente da área da base e da altura. Isso significa que um prisma reto e um oblíquo que possuem a mesma área da base e mesma altura têm o mesmo volume. Essa situação refere-se ao chamado **Princípio de Cavalieri**.

No século XVII o **matemático Bonaventura Cavalieri** estabeleceu um princípio para cálculo de volumes, que diz que dois sólidos **com bases no mesmo plano α** tiverem a **mesma altura** e, sempre que seccionados por qualquer plano **β paralelo a α** gerarem **secções de mesma área** ($A=B$, $A'=B'$, $A''=B''$, ...), então os dois sólidos tem **volume iguais**.



Para ilustrarmos o **Princípio de Cavalieri**, podemos considerar moedas iguais empilhadas de duas formas diferentes, como mostra a figura.



Note que as pilhas têm **mesma altura** e qualquer plano horizontal que seccione as duas pilhas determina nelas **secções de mesma área**.

É evidente que as duas pilhas têm também **volumes iguais**, pois o volume de cada pilha é a soma dos volumes das moedas que a compõem.

Paralelepípedo

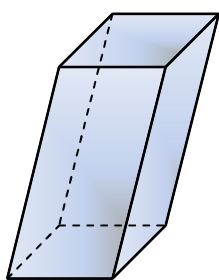
Todo prisma cujas faces são paralelogramos recebem o nome de paralelepípedo.

Se o paralelepípedo tem faces retangulares, ele é chamado de paralelepípedo retângulo, reto-retângulo ou ortoedro.

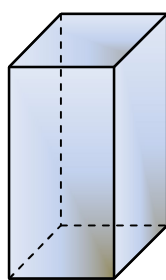
Se o paralelepípedo retângulo tiver todas as arestas congruentes, ele é chamado de **cubo**.

O **cubo** tem todas as suas **seis faces quadradas**.

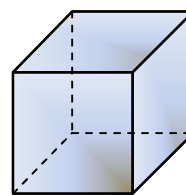
Exemplos



Paralelepípedo
Oblíquo



Paralelepípedo
Reto

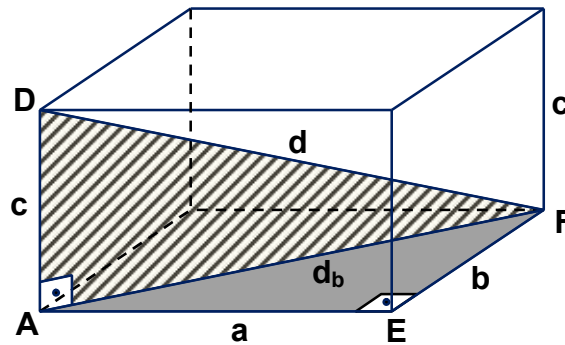


Cubo

Diagonal de um paralelepípedo retângulo

Na figura abaixo estamos indicando por **d** a medida da diagonal do

paralelepípedo retângulo, por d_b a medida da diagonal da base e por a, b, c as dimensões das arestas do paralelepípedo retângulo.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle AEF$, temos:

$$(d_b)^2 = a^2 + b^2$$

Aplicando Pitágoras no $\triangle FAD$, temos:

$$d^2 = (d_b)^2 + c^2$$

Portanto:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

No caso particular do cubo, como todas as arestas têm a mesma medida, temos:

$$d^2 = a^2 + a^2 + a^2$$

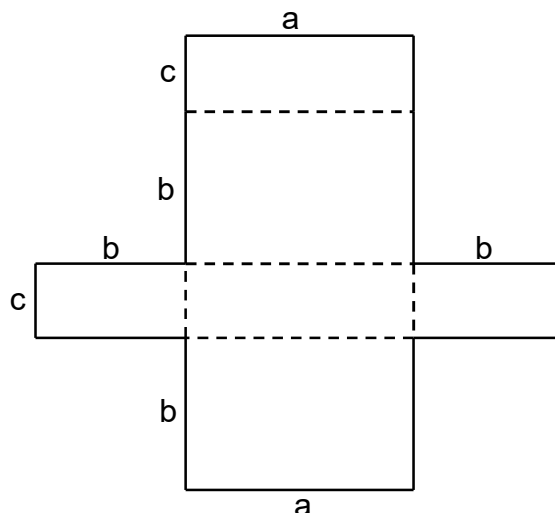
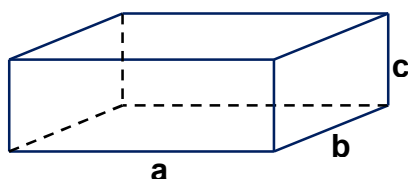
$$d^2 = 3a^2$$

$$d = \sqrt{3a^2}$$

$$d = a\sqrt{3}$$

Área total de um paralelepípedo retângulo

Considere o paralelepípedo retângulo abaixo de dimensões a, b e c e sua planificação:



A área total da figura é a soma das áreas de suas seis faces. Dentre essas faces, temos duas de área $a \cdot b$, duas de área $a \cdot c$ e duas de área $b \cdot c$. Logo, a área total será:

$$A_T = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$A_T = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

No caso particular do cubo, temos:

$$A_T = 2 \cdot (a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) = 2 \cdot 3a^2$$

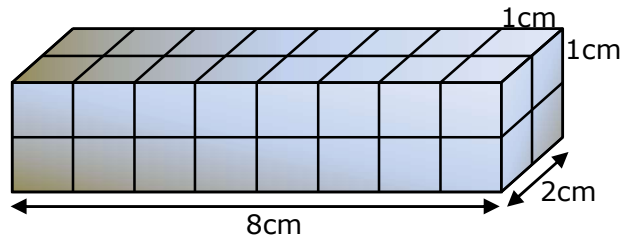
$$A_T = 6a^2$$

Volume de um paralelepípedo retângulo

Entende-se por volume de um sólido a quantidade de espaço por ele ocupado. Essa quantidade é determinada comparando-se esse sólido com outro tomado como unidade.

Consideremos um cubo de aresta 1 cm. A porção do espaço ocupado por esse cubo é uma unidade de medida de volume definida como 1 cm^3 . Lê-se: um centímetro cúbico.

Para medir o volume de um paralelepípedo, devemos comparar o seu volume com o volume de um cubo de aresta 1 cm, ou seja, devemos calcular a quantidade de cubos necessários para ocupar o espaço ocupado pelo paralelepípedo, conforme a figura abaixo:



Observando a figura verificamos que para calcular a quantidade de cubos que cabem no paralelepípedo retângulo, devemos multiplicar as três dimensões do paralelepípedo. Portanto, concluímos que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. No caso acima, teremos: $V = 8 \cdot 2 \cdot 2 = 32\text{cm}^3$. De modo geral, o volume é dado por:

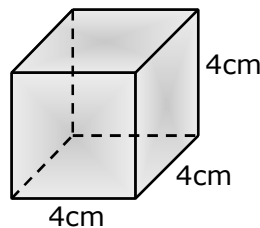
$$V = a \cdot b \cdot c$$

Para um cubo, temos:

$$V = a^3$$

Exemplo:

Qual é o volume de uma caixa cúbica de 4cm de aresta?



$$V = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64\text{cm}^3$$

Volume de um prisma qualquer

Como já vimos, o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões a , b e c é dado por: $V = a \cdot b \cdot c$

Podemos observar que $a \cdot b$ é a área da base (A_b) e c é a altura (h) do paralelepípedo retângulo. Logo, podemos escrever que o volume é dado pelo produto da área da base pela altura, isto é, $V = A_b \cdot h$

Caso geral do volume de um prisma

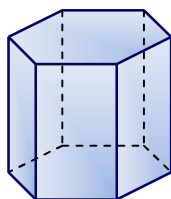
Consideremos agora um prisma triangular S_A de área da base A e altura h , em um prisma retangular S_B de mesma altura e área da base B . Pelo princípio de Cavalieri, o volume de S_A é igual ao de S_B . Então $VS_A = VS_B$.

Como $VS_A = A \cdot h$, então $VS_B = A \cdot h$. Portanto o volume de qualquer prisma é igual ao produto da área da base pela medida da altura.

$$V = A_b \cdot h$$

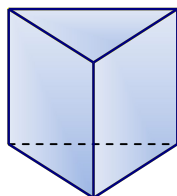
Exercícios

1. Dado um prisma hexagonal regular, cuja altura mede 12 cm e uma aresta da base, 4 cm, calcule:

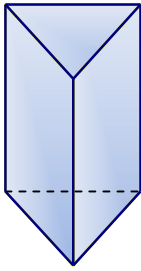


- a) A área da base
- b) A área lateral
- c) A área total
- d) O volume

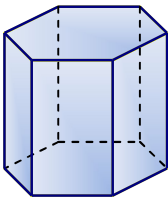
2. Num prisma triangular regular, a medida a da aresta da base é igual à medida h da altura do prisma. Sabendo-se que a área lateral é 10 cm^2 , calcular a sua área total.



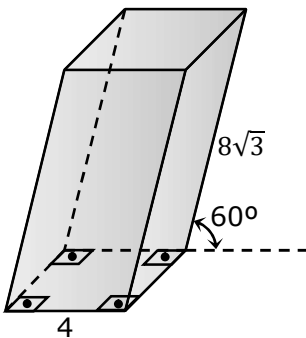
3. Calcular o volume de um prisma triangular regular, no qual a aresta da base mede 4 cm e altura mede $10\sqrt{3}\text{cm}$.



4. O volume de um prisma hexagonal regular é $81\sqrt{3}\text{cm}^3$. Calcular sua altura, sabendo que ela é o dobro da aresta da base.



5. As arestas laterais de um prisma quadrangular oblíquo formam 60° com o plano da base e esta é um quadrado de lado 4 cm. Calcule o volume do prisma sabendo que a medida de sua aresta lateral é $8\sqrt{3}\text{cm}$.



6. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são 4 cm, 6 cm e 8 cm. Calcule:
- a) A medida de sua diagonal.
 - b) Sua área total.
 - c) A medida de seu volume.

7. A diagonal da base de um prisma quadrangular regular mede $8\sqrt{2}cm$ e sua altura tem 16 cm. Calcule:

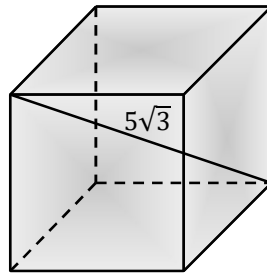
- a) A medida de uma diagonal desse sólido
- b) A medida das diagonais das faces laterais
- c) A sua área lateral
- d) A sua área total

8. Duas das dimensões de um paralelepípedo retângulo são 4 cm e 5 cm. Achar a medida da terceira dimensão sabendo que uma diagonal mede $\sqrt{105}cm$.

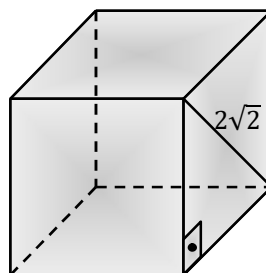
9. Dado um cubo de aresta 8 cm, calcular:

- a) A medida da diagonal do cubo
- b) A área total do cubo
- c) O volume do cubo

10. A diagonal de um cubo mede $5\sqrt{3}cm$. Calcule seu volume.



11. Calcule as medidas da aresta, da diagonal e a área total de um cubo, sabendo que a diagonal de uma de suas faces mede $2\sqrt{2}cm$.



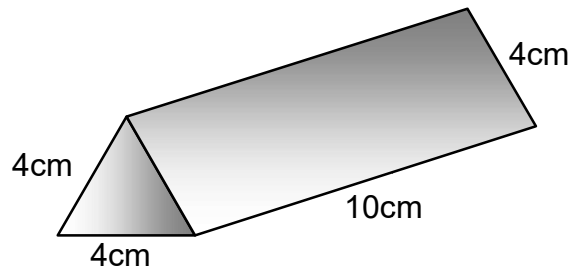
12. Um fabricante de chocolate lançará, no mercado, barras de chocolate com o formato da figura abaixo (prisma triangular regular). O fabricante pretende revestir toda a barra com papel laminado para maior proteção do alimento. O mínimo de papel a ser utilizado neste revestimento, em centímetros quadrados, é de, aproximadamente: (Considere: $\sqrt{3} = 1,7$)

a) 104

b) 115

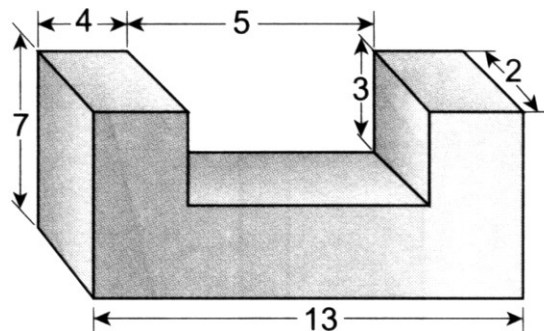
c) 134

d) 156



13. Obtenha a quantidade em cm^3 de metal para fabricação da peça representada pela figura abaixo.

Observação: As dimensões representadas abaixo estão em cm.



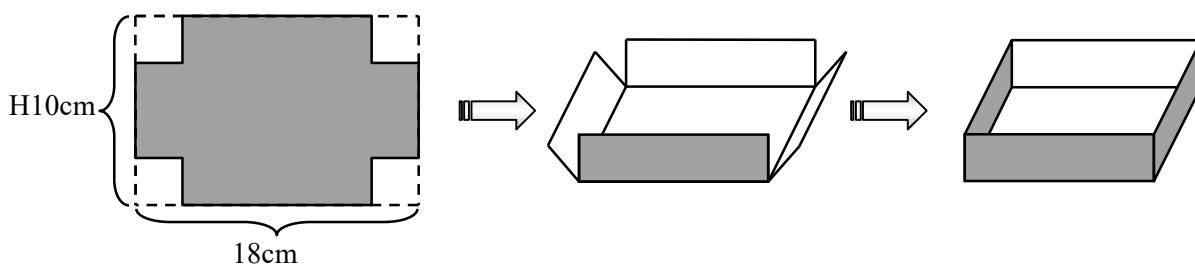
14. Uma caixa d'água retangular com 3 m de comprimento e 2 m de largura, quando cheia, fica com água até 1,5 m de altura. Qual o volume máximo de água dessa caixa?

Lembrete: $1\text{m}^3 = 1000 \text{ L}$

I

15. Uma piscina retangular de 30 m x 15 m, de fundo horizontal, está com água até 2 m de altura. Um produto químico deve ser misturado na água na razão de um pacote para cada 4500 L. Qual o número de pacotes a serem usados?

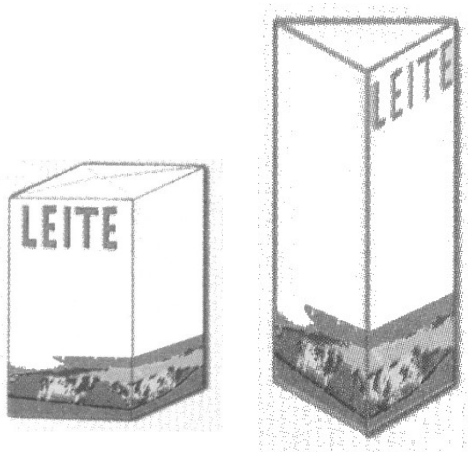
16. Uma folha retangular de cartolina tem comprimento 18cm e largura 10cm. Recortam-se dessa folha quatro quadrados congruentes de modo que cada um deles tenha um dos vértices em um vértice da folha, formando-se uma superfície aberta de um paralelepípedo reto-retângulo:



Determine o volume da caixa, sabendo que a medida da diagonal da caixa construída mede 13cm?

17. Um fazendeiro vende leite em uma embalagem de papelão que tem a forma de um prisma reto de base quadrada, com dimensões 10 cm, 10 cm e 12 cm. Ele pretende vender outro tipo de leite numa nova embalagem, que tem a forma de um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero de 30 cm de perímetro.

a) Qual deve ser a altura da nova embalagem para que ela tenha o mesmo volume da primeira?



b) Na fabricação de qual das duas embalagens será usada uma menor quantidade de papelão? De quanto será a diferença? (Considere $\sqrt{3} = 1,7$)

18) Um tanque em forma de paralelepípedo tem altura de 2m. Sua base é um retângulo horizontal de lados 1,2 m e 0,9 m. Uma pessoa ao mergulhar um cubo completamente no tanque, faz o nível da água subir 0,2m. Determine a aresta do cubo.

Bibliografia

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. São Paulo, Ática, 2014.

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva. São Paulo, Moderna 2014.

BARROSO, Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva, 2010.

MUNOZH, Aínda, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Sites:

<http://www.somatematica.com.br>

Escola 24 horas - <http://www.escola24h.com.br>

<http://www.matematica.com.br>