FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA

ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

1º ANO

1ª etapa

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

COORDENAÇÃO

SERGIO LOPES RODRIGUES

Razões Trigonométricas no Triângulo retângulo

Estudamos anteriormente o Teorema de Pitágoras que é uma relação que envolve as medidas de seus lados.

Vamos estudar agora outras relações que envolvem não somente as medidas dos lados, mas também as medidas dos ângulos internos do triângulo retângulo.

A parte da geometria que estuda os métodos para calcular as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo retângulo chama-se **Trigonometria**.

O estudo da Trigonometria originou-se há vários séculos atrás, com a finalidade de resolver problemas práticos relacionados à astronomia. Hoje a trigonometria não se restringe somente ao estudo dos triângulos. Ela está presente em diversas áreas principalmente na topografia para medir distâncias muito grandes ou nas situações em que há dificuldade de se fazer medições, como por exemplo, medir altura de uma montanha ou de um prédio.

Topógrafo

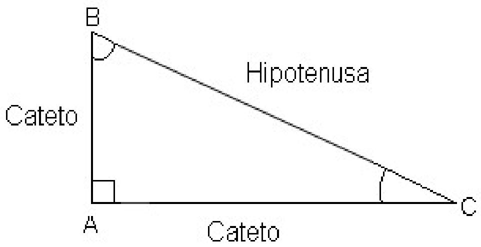
Teodolito

O Topógrafo utiliza um instrumento chamado Teodolito, que tem como função principal medir ângulos. A partir das medidas obtidas, obtém informações detalhada do local que está sendo analisado, como inclinação, distâncias, áreas e etc.

Antes de estudarmos razões trigonométricas devemos saber o que é cateto oposto e cateto adjacente a um ângulo.

Num triângulo retângulo, cada um dos ângulos agudos é formado pela hipotenusa e por um cateto. Esse cateto é chamado de **cateto adjacente** a esse ângulo agudo. O outro cateto que não forma o ângulo em questão é chamado de **cateto oposto** a esse ângulo.

No triângulo **ABC** abaixo, por exemplo, temos:



Em relação ao ângulo B

AB – cateto adjacente ao ângulo B.

AC – cateto oposto ao ângulo B

Em relação ao ângulo C

AC – cateto adjacente ao ângulo C

AB – cateto oposto ao ângulo C

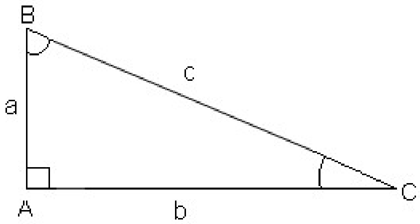
Observação:

O lado BC é a hipotenusa.

Em um triângulo, podemos determinar três razões trigonométricas envolvendo as medidas da **hipotenusa** e dos **catetos**. Essas razões são chamadas de **seno**, **cosseno** e **tangente**.

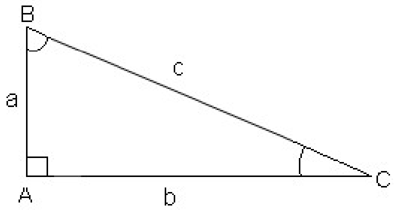
- Chama-se seno de um ângulo agudo a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{c}$ (lê-se: seno de $\hat{B}$) e $\text{sen}\,\hat{C} = \frac{a}{c}$



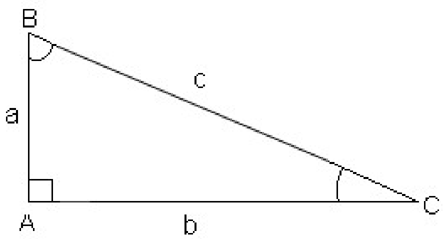
- Chama-se cosseno de um ângulo agudo a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$\text{Cos}\,\hat{B} = \frac{a}{c}$ (lê-se: cosseno de $\hat{B}$) e $\text{Cos}\,\hat{C} = \frac{b}{c}$

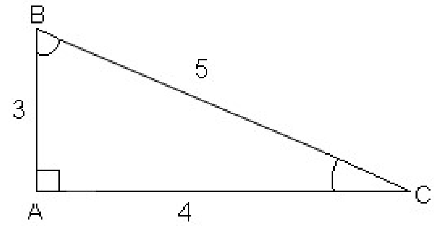


- Chama-se tangente de um ângulo agudo a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{a}$ (lê-se: tangente de $\hat{B}$) e $\text{tg}\,\hat{C} = \frac{a}{b}$



No triângulo retângulo abaixo, temos o seguinte exemplo:



$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{4}{5}$ ou $\text{sen}\,\hat{B} = 0{,}8$

$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{3}{5}$ ou $\text{sen}\,\hat{B} = 0{,}6$

$\cos\,\hat{B} = \frac{3}{5}$ ou $\cos\,\hat{B} = 0{,}6$

$\cos\,\hat{C} = \frac{4}{5}$ ou $\cos\,\hat{B} = 0{,}8$

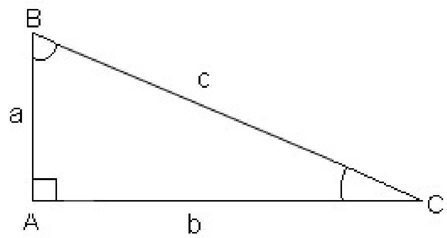
$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{4}{3}$ ou $\text{tg}\,\hat{B} = 1{,}333...$

$\text{tg}\,\hat{C} = \frac{3}{4}$ ou $\text{tg}\,\hat{C} = 0{,}75$

Relações entre razões trigonométricas

Veja agora duas relações importantes:

Observando a figura, temos:



sen $\hat{B}$ = $\frac{b}{c}$, então $b = c \,.\, \text{sen}\,\hat{B}$

cos $\hat{B}$ = $\frac{a}{c}$, então $a = c \,.\, \cos\hat{B}$

De acordo com o Teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (c \,.\, \text{sen}\,\hat{B})^2 + (c \,.\, \cos\hat{B})^2 = c^2$$

$$c^2 \,.\, \text{sen}^2\hat{B} + c^2 \,.\, \cos^2\hat{B} = c^2$$

Dividindo os dois termos por c^2 , temos:

$$\boxed{\text{sen}^2\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1}$$

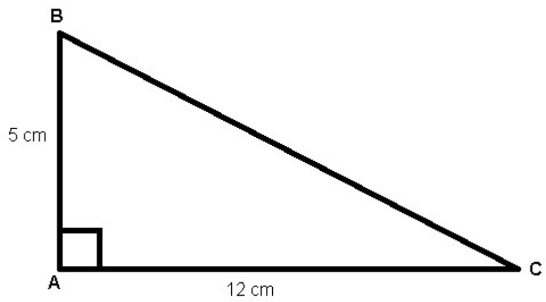
Se calcularmos o quociente $\frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\cos\hat{B}}$, obtemos:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \text{tg}\,\hat{B}$$

Portanto, $\boxed{\text{tg}\,\hat{B} = \frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\cos\hat{B}}}$

Exercícios resolvidos

1) No triângulo retângulo em $\hat{A}$, $\overline{AB}$ = 5 cm e$\overline{AC}$ = 12 cm. Determine o seno, o cosseno e a tangente de $\hat{B}$ e $\hat{C}$.



Solução:

Para determinar seno, cosseno e tangente, devemos encontrar o valor da hipotenusa $\overline{BC}$. Para isso, basta aplicar o Teorema de Pitágoras. Vejamos:

$(\overline{BC})^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \longrightarrow (\overline{BC}) = \sqrt{169} = 13.$

Logo:

seno $\hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{12}{13}$ seno $\hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{5}{13}$

cos $\hat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{5}{13}$ cos $\hat{C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{12}{13}$

tg$\hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{5}$ tg $\hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{5}{12}$

2) Seja **β** um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo. Se cos**β**=$\frac{1}{3}$, determinar sen **β** e tg**β.**

Solução:

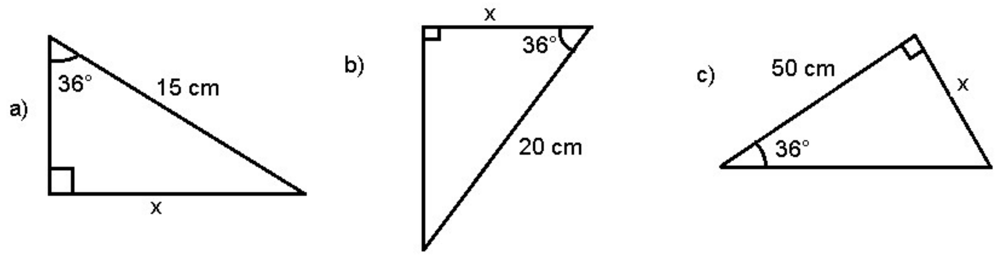
Aplicando a relação sen^2**β +** cos^2**β**= 1, teremos:

$\text{sen}^2\,\boldsymbol{\beta} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \longrightarrow \quad \text{sen}^2\,\boldsymbol{\beta} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{9-1}{9} = \frac{8}{9} \quad \longrightarrow \quad \text{sen}\,\boldsymbol{\beta} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\text{tg}\boldsymbol{\beta} = \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{3}{1} = 2\sqrt{2}$

Portanto, tg**β** = $2\sqrt{2}$

3) Determine o valor de x em cada caso, onde sen 36° = 0,58, cos 36° = 0,80 etg 36° = 0,72.



Solução:

De acordo com a **figura (a)**, os elementos que temos para relacionar são: **ocateto oposto ao ângulo de 36°**(x) e a **hipotenusa** (15 cm). Portanto usaremos o sen 36° para calcular o valor de x. Assim:

sen 36° = $\frac{x}{15}$, como o sen 36° é 0,58 temos: 0,58 = $\frac{x}{15}$ => x = 15. 0,58

x = 8,7 cm

De acordo com a **figura (b)**, os elementos que temos para relacionar são: **ocateto adjacente ao ângulo de 36°**(x) e a **hipotenusa** (20 cm). Portanto usaremos o cos 36° para calcular o valor de x. Assim:

cos 36° = $\frac{x}{20}$, como o cos 36° é 0,80 temos: 0,80 = $\frac{x}{20}$ => x = 20. 0,80

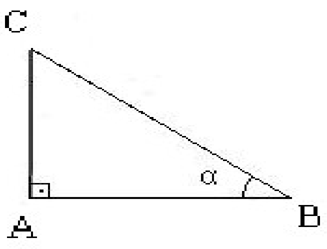
x = 16 cm

De acordo com a **figura (c)**, os elementos que temos para relacionar são: **ocateto oposto ao ângulo de 36°**(x) e o **cateto adjacente ao ângulo de 36°** (50 cm). Portanto usaremos a tg 36° para calcular o valor de x. Assim:

tg 36° = $\frac{x}{50}$, como o tg 36° é 0,72 temos: 0,72 = $\frac{x}{50}$ => x = 50. 0,72

x = 36 cm

4) Determine o perímetro do triângulo retângulo ABC , sabendo-se que a hipotenusa $\overline{BC}$mede 10 m e cos α = $\frac{3}{5}$.



Solução:

Para determinar o perímetro do triângulo, devemos encontrar as medidas dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Vamos chamar $\overline{AB}$ = x e $\overline{AC}$ = y.

De acordo com a informação do problema, os elementos que temos para relacionar são: **ocateto adjacente ao ângulo** αe a **hipotenusa**$\overline{BC}$. Portanto usaremos o cos α para calcular o valor de $\overline{AB}$ = x . Assim:

cos α = $\frac{x}{10}$, como cos α = $\frac{3}{5}$, temos: $\frac{3}{5}$ = $\frac{x}{10}$ ⇒ 5x = 3. 10 ⇒ 5x = 30 ⇒ x = $\frac{30}{5}$ = 6m.

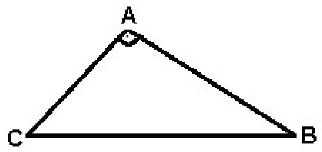
Aplicando o Teorema de Pitágoras para calcular o valor de y:

$X^2 + y^2 = 30^2 \Rightarrow 6^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{64} = 8$m.

Logo, o perímetro P = 6 + 8 + 10 = 24 m.

Exercícios

1) No triângulo ABC, temos: med$\overline{AB}$ = 12 cm e med$\overline{AC}$ = 5 cm.

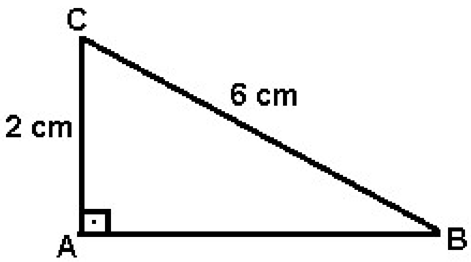


a) Qual é a medida da hipotenusa?

b) Determine o cateto oposto e o adjacente ao ângulo $\hat{B}$;

c) Encontre as relações cos $\hat{B}$, sen $\hat{C}$ e tg$\hat{B}$.

2) Considere o triângulo retângulo:



Determine:

a) O lado $\overline{AB}$;

b) sen$\hat{B}$ e tg$\hat{C}$;

c) $\cos^2\hat{C} + \text{sen}^2\hat{C}$;

d) 2 sen$\hat{B}$ + $\sqrt{2}$ cos $\hat{B}$.

3) Se o seno do ângulo de um triângulo retângulo é dado por: sen$\widehat{B}$ = $\frac{2}{5}$.

Determine:

a) tg$\widehat{B}$;   b) cos $\widehat{B}$

4) Determine o perímetro do triângulo retângulo ABC, sabendo-se que o cateto oposto ao ângulo α mede 10m e sen α = $\frac{5}{13}$.

5) Um foguete da NASA é lançado com uma velocidade de 240 m/s, fazendo um ângulo de inclinação de 75º com o chão. Após 6 segundos, o foguete atinge uma certa altura de x metros com trajetória retilínea e velocidade constante. Encontre a altura percorrida pelo foguete. Dados: sen 75° = 0,97 ; cos 75° = 0,26; tg 75° = 3,73

6) Do alto de um navio, um marinheiro avista a torre de um certo farol segundo um ângulo de 40° . Sabendo-se que a altura do farol é de 83 metros. Determine a distância do navio ao farol. Observação: desprezar a altura do navio. Dados: sen 40° = 0,64 ; cos 40° = 0,76; tg 40° = 0,83.

Razões trigonométricas para os ângulos de 30º, 45º e 60º

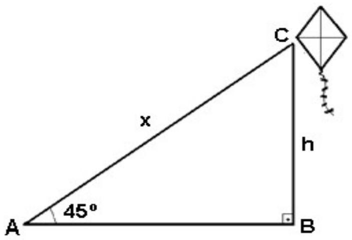
Os ângulos de 30º, 45º e 60º são muito presentes na resolução de problemas envolvendo o estudo de triângulo retângulo. Por este motivo, devemos conhecer as relações de seno, cosseno e tangente para esses ângulos.

Considere as seguintes situações:

Situação 1) Paulo adora de empinar pipas. Sabendo-se que a linha da pipa esticada forma um ângulo constante de 45º com o solo e possui **x** metros de comprimento, como Paulo poderia determinar a distância **h** da pipa ao solo e os valores de sen45º, cos 45º e tg 45º?

Solução:

Observando a figura abaixo, temos $\widehat{A} = 45º$ e de $\widehat{B} = 90º$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então $\widehat{C} = 45º$. Logo,o triângulo ABC é isósceles.Dessa forma a med$\overline{AB}$ = med $\overline{BC}$ = h.



Pelo teorema de Pitágoras $(AB)^2 + (BC)^2 = D^2$. Substituindo os valores, teremos: $h^2 + h^2 = x^2 \longrightarrow 2h^2 = x^2 \longrightarrow h^2 = \frac{x^2}{2} \longrightarrow h = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Logo, $\overline{AB} = \overline{BC} = h = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Aplicando as relações trigonométricas para 45º, teremos:

1ª) $\text{sen } 45º = \frac{\overline{BC}}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{x} = \frac{x\sqrt{2}}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2ª) $\cos 45º = \frac{\overline{AB}}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{x} = \frac{x\sqrt{2}}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

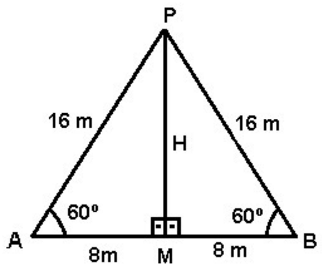
3ª) $\text{tg } 45º = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{\frac{x\sqrt{2}}{2}} = 1$

Observação: Qualquer que seja a distância $\overline{AC}$, os valores de seno, cosseno e tangente de 45º seriam os mesmos.

Situação 2) Duas pessoas A e B, separadas 16 metros uma da outra,observam uma lâmpada em um poste com H metros de altura. Sabe-se que a base do poste se localiza no ponto M (ponto médio da distância entre AB), e que o topo do poste (ponto P) equidista 16 metros de A e B formando dois ângulos de elevação de 60º. Com estas informações, vamos determinar o valor de H, seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos existentes nesta situação- problema.

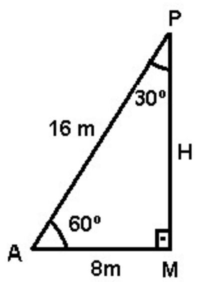
Solução:

Interpretando o problema, temos a seguinte figura:



Do triângulo AMP, podemos obter a medida do ângulo $\mathrm{A\hat{P}M}$ através do Teorema de Thales. Assim, med $(\mathrm{A\hat{P}M})$ = 30º. Da mesma forma med $(\mathrm{B\hat{P}M})$ = 30º.

Analisando o triângulo AMP, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras $16^2 = 8^2 + H^2$ => $H^2 = 256 - 64 = 192$
H = $\sqrt{192} = 8\sqrt{3}$ m.

Fazendo as relações trigonométricas com 30º e 60º, teremos:

sen 30º = $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ e sen 60º = $\frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

cos 30º = $\frac{8\sqrt{3}}{16}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e cos 60º = $\frac{8}{16}$ = $\frac{1}{2}$

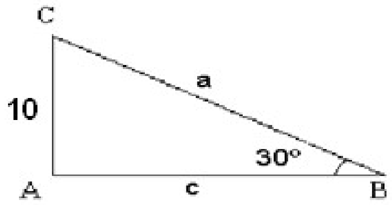
tg 30º = $\frac{8}{8\sqrt{3}}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ tg 60º = $\frac{8\sqrt{3}}{8}$ = $\sqrt{3}$

Reunindo os valores numa tabela, temos:

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercício resolvido

1) No triângulo retângulo ABC da figura seguinte, determine as medidas **a** e **c** indicadas.



Resolução:

Para calcular **a**, a razão trigonométrica aplicada deve ser a que relaciona os seguintes elementos:

- ângulo (30º);

- cateto oposto ao ângulo de 30º (10);

- hipotenusa (**a**).

Tal razão é o **seno**. Assim, temos:

$\text{sen}30^{\circ} = \frac{10}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{a} \Rightarrow 1.a = 10 \, . \, 2 \Rightarrow a = 20$

Logo, a = 20.

Para determinar o valor de **c**, a razão trigonométrica aplicada deve ser a que relaciona os seguintes elementos:

- ângulo (30º);

- cateto adjacente ao ângulo de 30º (**c**);

- cateto oposto ao ângulo 30º (10).

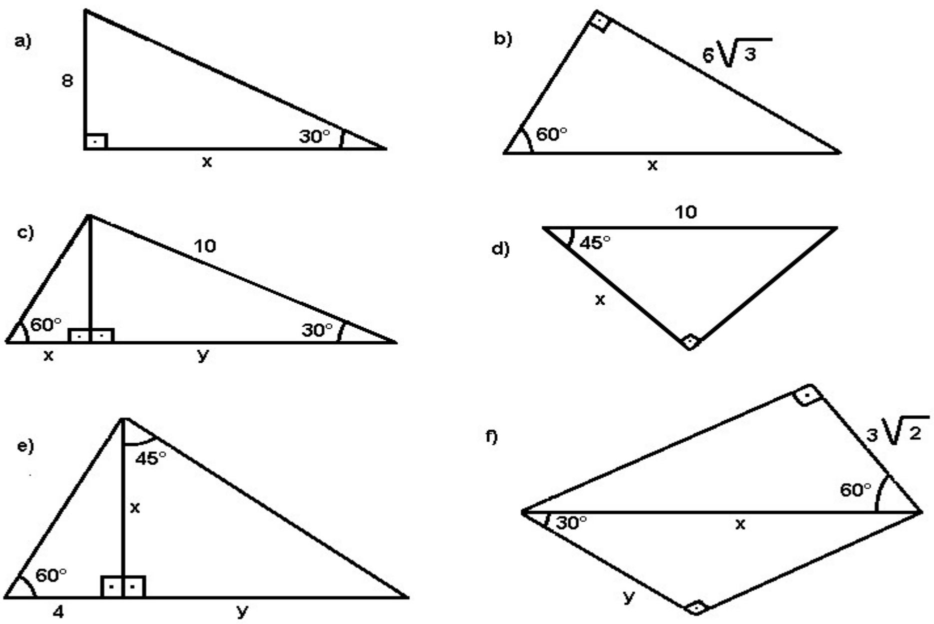
Tal razão é o **tangente**. Assim, temos:

$\text{tg}30^o = \frac{10}{c} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10}{c} \Rightarrow \sqrt{3}\,c = 30 \Rightarrow c = \frac{30}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = \frac{30\sqrt{3}}{3} \Rightarrow c = 10\sqrt{3}$

Logo, $c = 10\sqrt{3}$.

Exercícios

7) Encontre os valores dos lados indicados de cada triângulo abaixo:



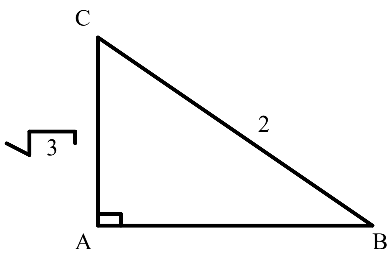
8) O valor de $\dfrac{\text{tg}45(\text{ seno } 30^o + \cos 60^o)}{\text{tg } 30^o}$ é:

a) $\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ d)) $4\sqrt{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

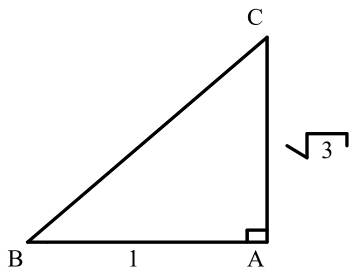
9) Um avião ao levantar vôo, forma com a horizontal um ângulo constante de 45º. Que altura estará e que distância percorrerá quando sobrevoar uma torre localizada a 6 km do ponto de partida?

10) Em cada triângulo dado, encontre a medida do ângulo B.

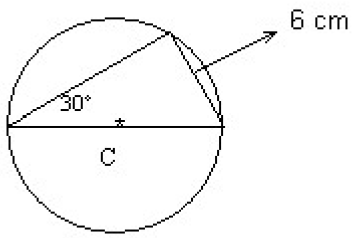
a)



b)



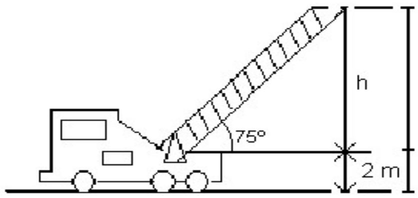
11) Qual o raio da circunferência representada na figura ?



12) Uma escada de 30 m de comprimento está apoiada em uma parede num ponto P. Sabendo que a escada forma com a parede um ângulo de 60^0, então a distância do ponto P até o solo é:

a) 15 m b) 20m c) 14m d) 6m e) 5m

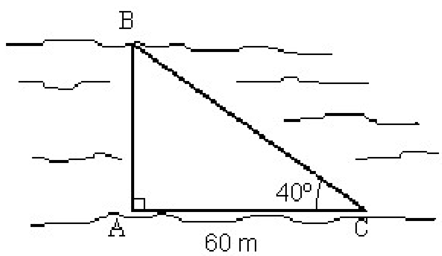
13) Uma escada de um carro de bombeiros pode estender-se até um comprimento máximo de 20m, quando é levantada a um ângulo máximo de 75°. Sabe-se que a base da escada está colocada sobre um caminhão, a uma altura de 2 m do solo. Que altura, em relação ao solo, essa escada poderá alcançar ?(Dados: sen 75° = 0,97 ; cos 75° = 0,26; tg 75° = 3,73)



a) 32 mb) 29,6 m c) 24,2 m d) 21,4 m

14) A fim de medir a largura de um lago, uma pessoa, com o teodolito em A, mirou o ponto B e, a seguir, o ponto C, de tal forma que o ângulo BÂC fosse reto. Com o teodolito em C, mirou os pontos A e B e verificou no teodolito que o ângulo ACB era de 40°. Qual a largura do rio, sabendo-se que a distancia AC medida por ela foi de 60 m ?

(Use: sen 40° = 0,64 ; cos 40° = 0,76; tg 40° = 0,83)



Bibliografia

BARROSO,JulianeMatsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

GIOVANNI, José Rui; BONJORNO, José Roberto. Matemática. São Paulo, FTD,1992.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva,2010.

MARCONDES, Carlos Alberto ET AL. Matemática. São Paulo, Ática, 2000.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática antes e depois. São Paulo, Saraiva, 2006.

MUNOHZ, Ainda, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Rodrigues,L.E.M.J.**MecânicaTécnica**,Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia- São Paulo

Sites:

http://www.somatematica.com.br

Escola 24 horas - http://www.escola 24h.com.br

http://www.matematica.com.br