FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA

ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

1º ANO

1ª etapa

Razões trigonométricas no triângulo qualquer

COORDENAÇÃO

SERGIO LOPES RODRIGUE

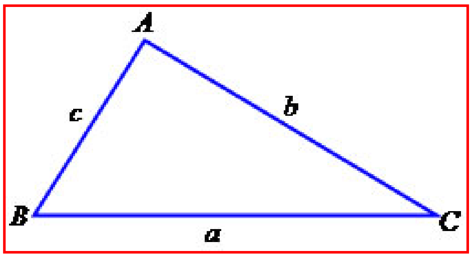
Lei dos senos e lei dos cossenos

Estudamos anteriormente os métodos para calcular as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo retângulo. Agora vamos estender os nossos estudos a outros tipos de triângulo. O conhecimento das relações entre lados e ângulos desses triângulos é fundamental para o topógrafo, pois se ele conhecer três das seis medidas de lados e ângulos de um triângulo qualquer poderá calcular as demais. No intuito de calcular medidas de ângulos e lados desconhecidos nas situações-problema envolvendo triângulos quaisquer utilizamos relações conhecidas como **lei dos senos e lei dos cossenos.**

Lei dos Senos

A lei dos senos estabelece a relação entre a **medida de um lado e o seno do ângulo oposto** a esse lado. Ela determina que a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto é constante em um mesmo triângulo.

Assim, para um triângulo ABC de lados a, b, c, podemos escrever.

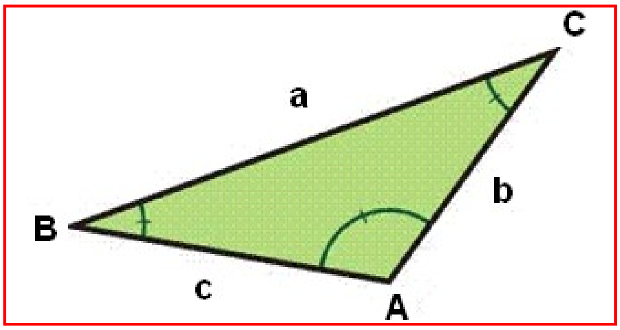


$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Lei dos Cossenos

A lei dos cossenos estabelece a relação entre a **medida dos três lados do triângulo e cosseno do ângulo formado por dois deles**. Ela determina que o quadrado da medida um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois menos duas vezes o produto destes dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

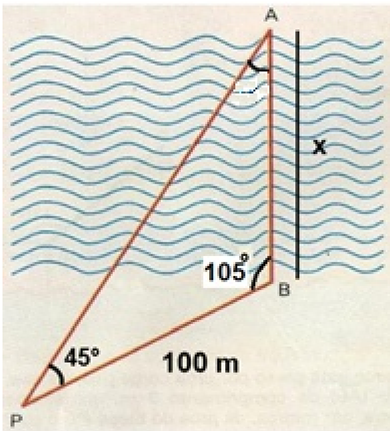
Assim, para um triângulo ABC de lados a, b, c, podemos escrever.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C}$$

Vamos analisar as seguintes situações-problema:

O desenho abaixo representa o trecho de um rio onde uma empresa deseja construir uma ponte AB. O topógrafo da empresa, com o teodolito em P, mirou o ponto B e, a seguir, o ponto C, de tal forma que o ângulo $\hat{P}$ fosse 45º. Com o teodolito em B, mirou os pontos A e P e verificou no teodolito que o ângulo $\hat{B}$ era de 105°. Qual deverá ser o comprimento da ponte, sabendo-se que a distância PB medida pelo topógrafo foi de 100 m?



Como temos **dois ângulos** e somente **um lado**, devemos utilizar a **lei dos senos**, mas antes precisamos descobrir o valor do ângulo $\hat{A}$do triângulo para determinarmos a medida **x** da ponte AB.
Como sabemos, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, portanto, o ângulo $\hat{A}$é:

$\hat{A}$ + 105º + 45º = 180º
$\hat{A}$ + 150º = 180º

$\hat{A}$ = 180º – 150º
$\hat{A}$ = 30º

Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{x}{sen\hat{P}} = \frac{100}{sen\hat{A}}$$

$$\frac{x}{sen45^0} = \frac{100}{sen30^0}$$

$sen45^0 \cong 0{,}71$

$sen30^0 = 0{,}5$

$$\frac{x}{0{,}71} = \frac{100}{0{,}5}$$

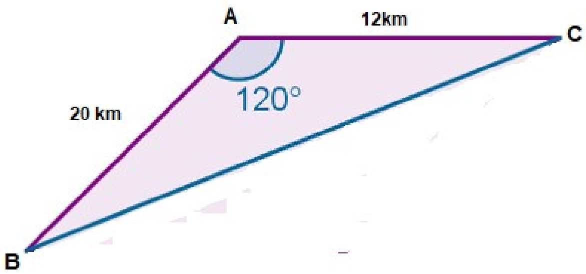
$$x = \frac{0{,}71\ .\ 100}{0{,}5}$$

$$x = \frac{71}{0{,}5} = \frac{710}{5}$$

x= 142

Portanto, o comprimento da ponte deverá ser 142 m.

Na figura, A, B e C são três bairros sobre um mapa sem escala. Sabe-se que a distância AB = 20km e AC = 12km, onde AB e AC formam entre si um ângulo de 120º. Determine a distância entre os bairros B e C, em km.



Solução

Como temos dois lados e somente um ângulo, devemos utilizar a lei dos cossenos para calcular a medida da distância BC. Para isso, vamos considerar:
AB = b = 20 cm
AC = c = 12 cm
cos 120º = cos A = - 0,5 (valor encontrado em tabelas trigonométricas).

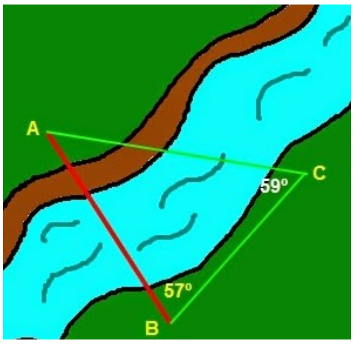
Substituindo esses valores na fórmula:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.b \,.c \,.\cos A$
$a^2 = 20^2 + 12^2 - 2 \,.20 \,.12 \,. (- 0{,}5)$
$a^2 = 400 + 144 + 240$
$a^2 = 784$
$a = \sqrt{784}$
a = 28 cm

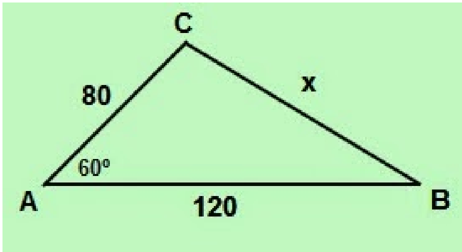
Portanto, a distância BC é28Km.

Exercícios

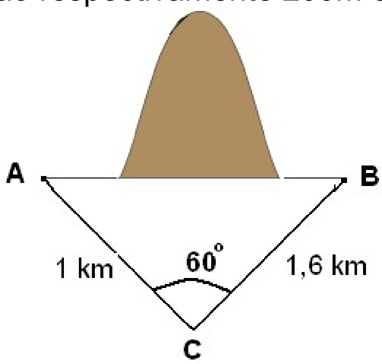
1) Uma ponte deve ser construída sobre um rio, unindo os pontos A e B, como ilustrado na figura a seguir. Para calcular o comprimento AB, escolhe-se um ponto C, na mesma margem em que B está, e medem-se os ângulos $\boldsymbol{C\hat{B}A}$ = 57° e $\boldsymbol{A\hat{C}B}$ = 59°. Sabendo que ***BC*** mede 30m, calcule, em metros, a distância ***AB .*** (Dado: use as aproximações sen(59°) ≈ 0,87 e sen(64°) ≈ 0,90)



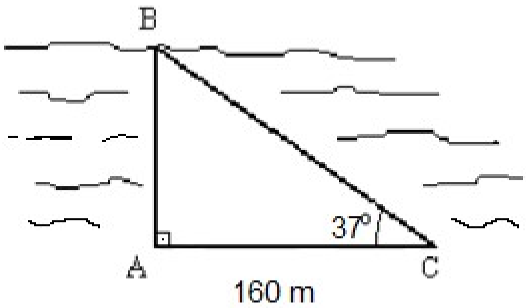
2) (UNIRIO)- Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que AB = 120km e AC = 80km, onde A é uma cidade conhecida, como mostra a figura. Determine a distância entre B e C, em km.



1) Uma construtora deseja construir um túnel para diminuir a distância entre dois bairros A e B. O topógrafo da empresa com o teodolito em C, mirou o ponto A e, a seguir, o ponto B, verificou no teodolito que o ângulo $\hat{C}$ era **60º**. Constatou também que as distâncias AC era 1km e CB igual 1,6 km. Determine o comprimento do túnel, sabendo que as distâncias dos pontos A e B ao morro são respectivamente 200m e 300m.



4) A figura mostra o trecho de um rio onde se deseja construir uma ponte do ponto A ao ponto B.Um topógrafo, com o teodolito em A, mirou o ponto B e, a seguir, o ponto C, verificou no teodolito que o ângulo$\hat{A}$ era **reto**. Com o teodolito em C, mirou os pontos A e B e verificou que o ângulo$\hat{C}$ era de 37º. Então, o valor do ângulo $\hat{B}$ é:



a) 90º b)50º c) 53º d) 37º

b) Qual deverá ser o comprimento da ponte, sabendo-se que a distância AC medida pelo topógrafo foi de 160 m?

(Use: sen 37° = 0,6 ; sen53° = 0,8)

a) 150 m b) 120 m c) 100 m d) 80 m

]

Lei do seno e cosseno na mecânica

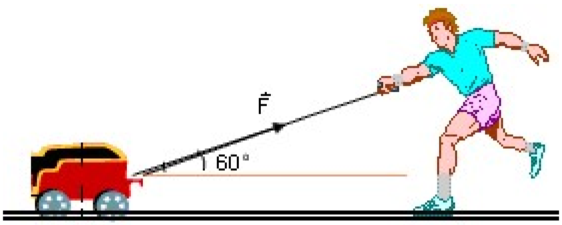
Antes de falarmos sobre o assunto, iremos fazer uma breve revisão sobre **grandeza vetorial** e **regra do paralelogramo.**

Grandeza vetorial

Uma grandeza vetorial é caracterizada por três elementos fundamentais, intensidade, direção e sentido. No curso de mecânica é muito comum a utilização de grandezas vetoriais como posição e força.

A força é caracterizada como uma grandeza vetorial, pois quando se empurra um objeto através do chão aplica-se no mesmo uma força com intensidade suficiente para movê-lo e direção desejada para o movimento.

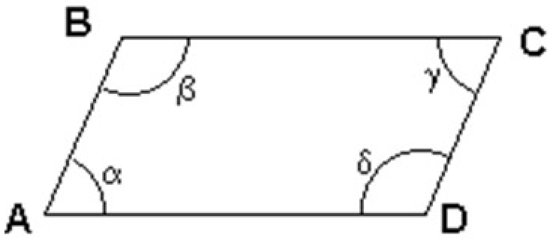
Uma grandeza vetorial pode ser representada graficamente por uma seta, que é utilizada para definir seu módulo, sua direção e seu sentido. Graficamente o módulo de um vetor é representado pelo comprimento da seta, a direção é definida através do ângulo formado entre um eixo de referência e a linha de ação da seta e o sentido é indicado pela extremidade da seta.



Praticamente todos os problemas envolvendo os conceitos de soma e subtração vetorial, bem como a determinação dos componentes de um vetor podem ser resolvidos a partir das **leis dos senos e dos cossenos**, que representam propriedades fundamentais da trigonometria.

Regra do paralelogramo

Os **paralelogramos** são polígonos que possuem os lados opostos paralelos com medidas geometricamente iguais. Nos paralelogramos, os ângulos opostos são iguais e os ângulos internos consecutivos de cada lado são suplementares, isto é, a soma entre eles é igual a 180º.



AB = DC

AD = BC

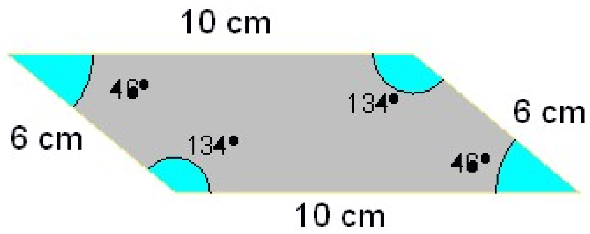
$$\propto = \boldsymbol{\gamma}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\delta}$$

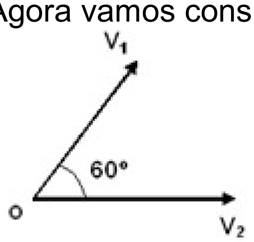
$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{180}°$$

$$\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\delta} = \mathbf{180}°$$

Exemplo:

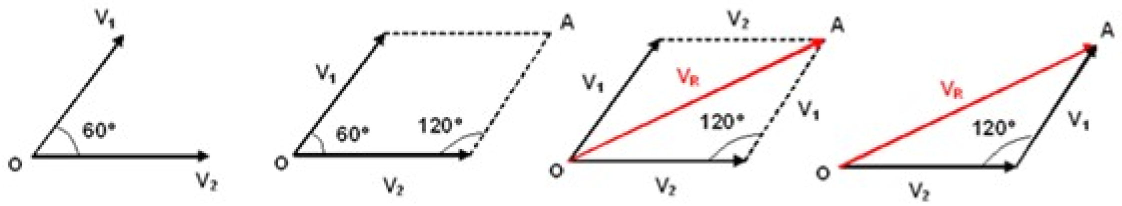


Agora vamos considerar dois vetores $\mathbf{V_1}$ e $\mathbf{V_2}$representado na figura.



Para obter o **vetor resultante** utiliza-se a regra do paralelogramo que consiste na obtenção do vetor resultante graficamente através de vetores paralelos transladados equivalentes. Assim, devemos proceder da seguinte forma:

Inicialmente, tracemos um vetor paralelo ao vetor $\mathbf{V_1}$ a partir da extremidade do vetor $\mathbf{V_2}$ de mesmo módulo e sentido, em seguida, tracemos um outro vetor paralelo ao vetor $\mathbf{V_2}$, começando na extremidade do vetor $\mathbf{V_1}$, de mesmo módulo e sentido. Obtemos um ponto **A**, passando ser a extremidade dos dois vetores transladados equivalentes. O vetor resultante $\mathbf{V_R}$ tem origem em **O** e extremidade **A**. Note que o vetor resultante $\mathbf{V_R}$ é a diagonal do paralelogramo. Assim, é obtido um triângulo de vetores

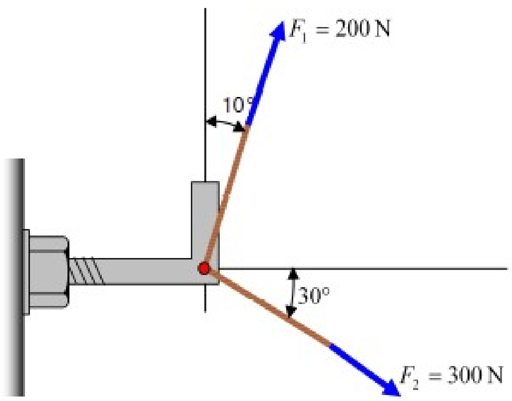


Veja que tendo os valores $\mathbf{V_1}$ e$\mathbf{V_2}$, podemos calcular o valor do vetor resultante através da lei do cosseno.

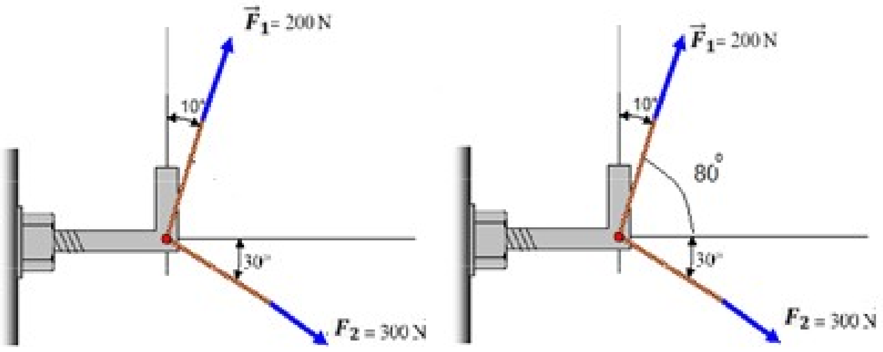
Agora vamos fazer dois exemplos de exercícios que podemos encontrar numa aula do **curso de mecânica**.

Exemplo 1

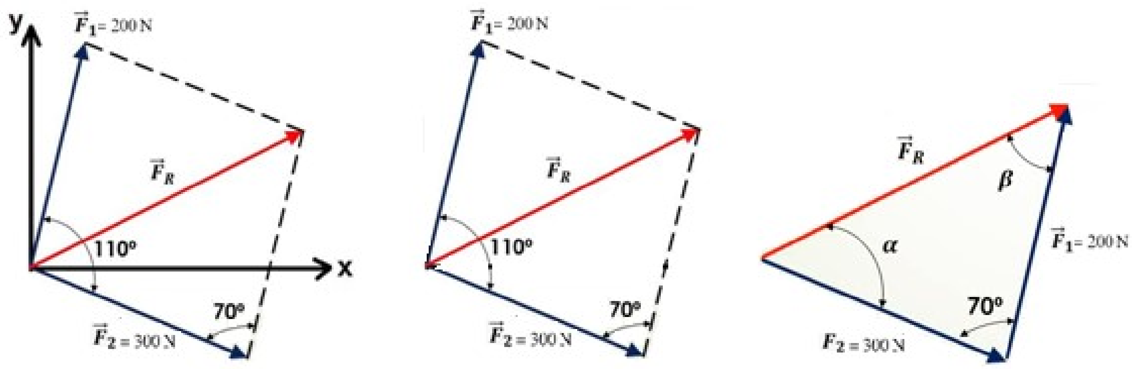
O parafuso mostrado na figura está sujeito a duas forças $\mathbf{F_1}$e $\mathbf{F_2}$. Determine o módulo e a direção em relação ao eixo horizontal (**x**) da força resultante.



Veja que o ângulo entre o **eixo horizontal** e a força $\boldsymbol{F_1}$ é **80º** (90º - 10º), logo o ângulo entre as forças é igual a **110º**(80º + 30º).



Portanto, o ângulo entre **F_1 equivalente** e **F_2** é igual a **70º** (180º - 110º). Com isso, construímos o triângulo de vetores.



Agora podemos calcular a força resultante aplicando a lei dos cossenos.

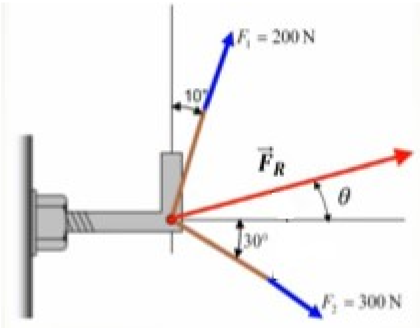
$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \,.\, F_1 \,.\, F_2 \,.\, cos70^o$$

$$F_R = \sqrt{F1^2 + F2^2 - 2.F1\,.F2\,.\cos 70^o}$$

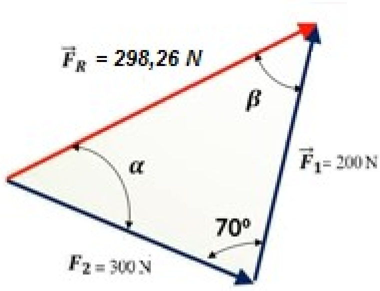
$$F_R = \sqrt{200^2 + 300^2 - 2.200\,.300\,.\;0{,}342}$$

F_R = 298,26 *N*

O problema pede também o ângulo que a força resultante faz com o eixo horizontal (x), ou seja, o ângulo θ da figura.



Antes de calcularmos o ângulo θ, devemos primeiramente calcular o ângulo α do triângulo dos vetores. O ângulo θ será a diferença entre α e o ângulo de 30º.



$$\frac{298{,}26}{sen\ 70^0} = \frac{200}{sen\hat{\alpha}}$$

$$\frac{298{,}26}{0{,}94} = \frac{200}{sen\hat{\alpha}}$$

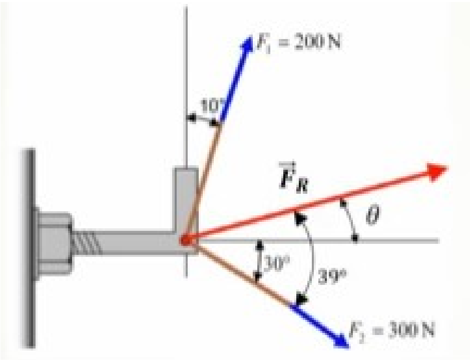
$$sen\ \alpha = \frac{200\ .\ 0{,}94}{298{,}26}$$

$$sen\ \alpha = 0{,}63$$

O ângulo cujo o seno é 0,63 é aproximadamente 39°. então:

α = 39°

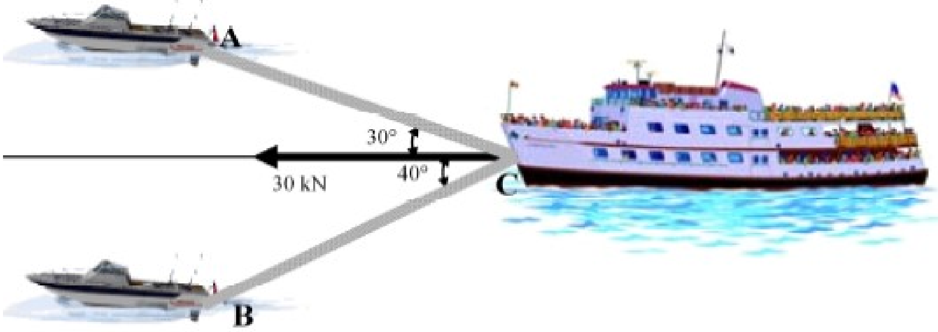
Logo, θ = 39° – 30 = 9°



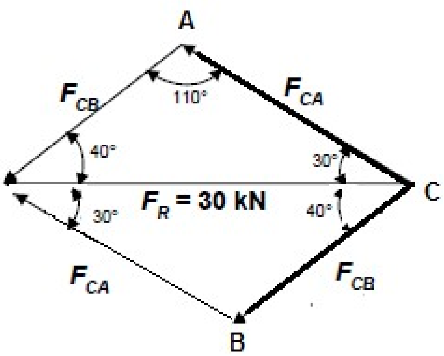
Portanto, a força resultante é igual a 298,26 *N* e o ângulo formado com o eixo horizontal é aproximadamente 9°.

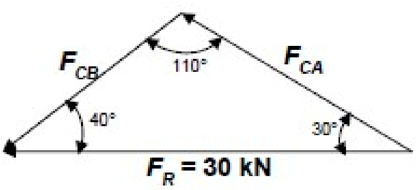
Exemplo 2

Duas lanchas rebocam um barco de passageiros que se encontra com problemas em seus motores, conforme figura. Sabendo-se que a força resultante é igual a 30kN, encontre suas componentes nas direções **AC** e **BC**.



A partir da regra do paralelogramo construiremos um triângulo de vetores envolvendo as forças atuantes nos cabos **CA** e **CB** que queremos obter e a força resultante.





Neste caso, devemos utilizar a lei do seno.

$$\frac{F_{CA}}{sen\ 40^o} = \frac{F_{CB}}{sen 30^o} = \frac{F_R}{sen 110^o}$$

Cálculo de F_{CA}

$$\frac{F_{CA}}{sen\ 40^o} = \frac{F_R}{sen 110^o}$$

$$\frac{F_{CA}}{0,64} = \frac{30}{0,94}$$

$$F_{CA} = \frac{30\ .\ 0,64}{0,94}$$

F_{CA} = 20, 42 kN

Cálculo de F_{CB}

$$\frac{F_{CB}}{sen\ 30^o} = \frac{F_R}{sen 110^o}$$

$$\frac{F_{CB}}{0,5} = \frac{30}{0,94}$$

$$F_{CB} = \frac{30\ .\ 0,5}{0,94}$$

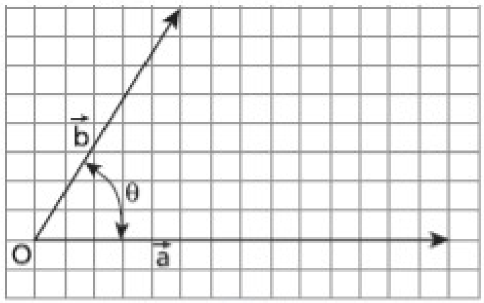
F_{CB} = 15,96 kN

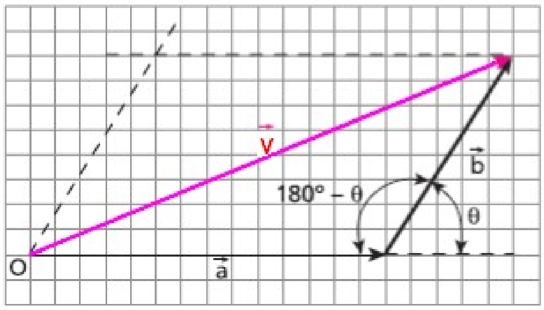
Portanto, as forças atuante nos cabos CA e CB são respectivamente 20,42 kN e 15,96 kN.

Considerações importantes:

Com o que foi visto acima, podemos definir uma fórmula para determina o módulo do vetor resultante.

O vetor resultante dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da figura, é dado por:





$$v_R^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2.\vec{a}.\vec{b}.\cos(180° - \theta).$$

Mais tarde aprenderemos que $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$, então:

$$v_R^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2.\vec{a}.\vec{b}.(-\cos\theta)$$

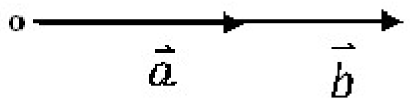
$$\boxed{v_R^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b}.\cos\theta}$$

ou

$$\boxed{V_R = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b}.\cos\theta}}$$

Outras considerações:

1ª) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tem mesma direção e sentido, neste caso $\theta = 0°$ e $\cos\theta = 1$, então:



$$v_R^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b}.\cos\theta$$

$$v_R^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b}.1$$

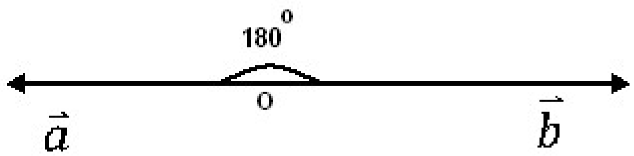
$v_R^2 = \vec{a}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$

$v_R^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2$

$V_R = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2}$

$$\boxed{V_R = \vec{a} + \vec{b}}$$

2ª) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tem mesma direção e sentido contrário, neste caso $\theta = 180^o$ e $\cos\theta = -1$, então:



$v_R^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b}.\cos\theta$

$v_R^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b}.-1$

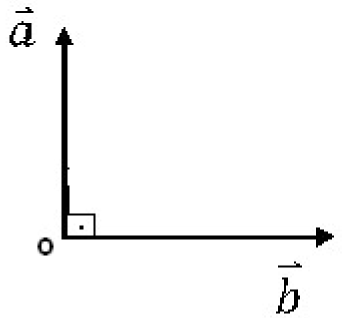
$v_R^2 = \vec{a}^2 - 2.\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$

$v_R^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$

$V_R = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2}$

$$\boxed{V_R = \vec{a} - \vec{b}}$$

3ª) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares, neste caso $\theta = 90^o$ e $\cos\theta = 0$, então:



$v_R^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b}.\cos\theta$

$v_R^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b}.0$

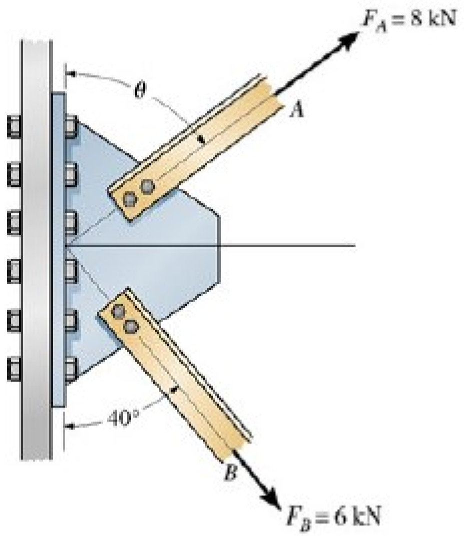
$$v_R^{\,2} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2$$

Veja que quando $\theta = 90^{o}$ a expressão se reduz ao **teorema de Pitágoras**.

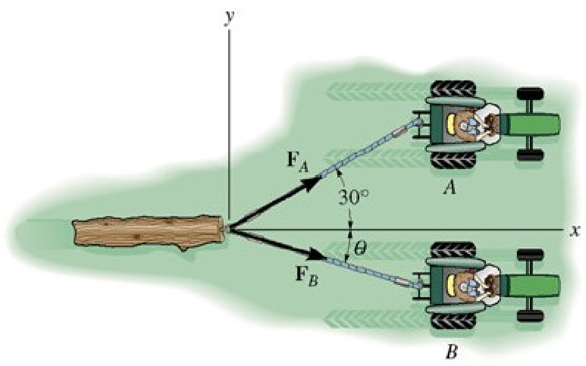
Exercícios

1) A chapa está submetida a duas forças F_A e F_B como mostra afigura. Se θ = 60º, determine a intensidade da força resultante e suadireção em relação ao eixo horizontal.

Observação: o cosseno de um ângulo entre 90º e 180º é **negativo**.



2) Uma tora de madeira é rebocada por dois tratores conforme figura. Sabendo-se que a força resultante é igual a 10kN e está orientada ao longo do eixo *x* positivo, determine a intensidade das forças $\boldsymbol{F_A}$ e $\boldsymbol{F_B}$.Considere θ = 15º.



Bibliografia

BARROSO,JulianeMatsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

GIOVANNI, José Rui; BONJORNO, José Roberto. Matemática. São Paulo, FTD,1992.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva,2010.

MARCONDES, Carlos Alberto ET AL. Matemática. São Paulo, Ática, 2000.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática antes e depois. São Paulo, Saraiva, 2006.

MUNOHZ, Ainda, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Rodrigues,L.E.M.J.**MecânicaTécnica**,Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia- São Paulo

Sites:

http://www.somatematica.com.br

Escola 24 horas - http://www.escola 24h.com.br

http://www.matematica.com.br