

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Escreva os primeiros cinco termos da sequência descrita pela seguinte lei:

$$a_1 = 10$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} - n$$

Resposta

$$a_2 = 2 \cdot a_1 - 2 = 2 \cdot 10 - 2 = 18$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 - 3 = 2 \cdot 18 - 3 = 33$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 - 4 = 2 \cdot 33 - 4 = 62$$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 - 5 = 2 \cdot 62 - 5 = 119$$

{10, 18, 33, 62, 119}

2) A soma dos n primeiros termos de uma sequência é $S_n = n^2 + 1$
O quarto termo dessa sequência é:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

Resposta A

$$S_1 = a_1 = 1^2 + 1 = 2.$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 2^2 + 1 = 5 \Rightarrow a_2 = 3.$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = 3^2 + 1 = 10 \Rightarrow a_3 = 5.$$

$$S_4 = S_3 + a_4 = 4^2 + 1 = 17 \Rightarrow a_4 = 7.$$

3) Os primeiros números da Sequência de Fibonacci são 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Escreva a fórmula geral dessa sequência.

Resposta

Na sequência de Fibonacci, a lei é:

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para } n > 2$$

4) (FGV-RJ) Considere a sequência cujo termo geral é $a_n = (-1)^n (2 + 3n)$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$. Escreva os seis primeiros termos dessa sequência.

Resposta

$\{-5, 8, -11, 14, -17, 20\}$

5) Descubra a regra que descreve a seguinte sequência: $S = \{4, 9, 16, 25, 36\dots\}$

Resposta

Observando que os números são quadrados perfeitos e que o primeiro número é 2^2 , o segundo 3^2 , etc. Podemos escrever a regra $a_n = (n+1)^2$.

6) A função afim $f(x) = 3x + 2$ leva a PA $\{-1, 1, 3, 5\}$ para outra PA $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Calcule os termos da segunda PA.

Resposta

$$x_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$$

$$x_2 = 3 \cdot (1) + 2 = 5$$

$$x_3 = 3 \cdot (3) + 2 = 11$$

$$x_4 = 3 \cdot (5) + 2 = 17$$

$\{-1, 5, 11, 17\}$

7) Quantos múltiplos de 13 existem entre 100 e 1000?

Resposta

Os múltiplos de 13 formam uma PA. O primeiro termo é o primeiro múltiplo de 13 maior que 100 e o último termo é o maior múltiplo de 13 menor que 1000. Calculamos, então, o primeiro termo. Fazendo $100 : 13$, obtemos quociente 7 e resto 9.

Somamos $13 - 9 = 4$ e obtemos 104 ($=13 \cdot 8$)

$$a_1=104$$

Fazendo $1000 : 13$, obtemos 76 e resto 12.

Portanto: $na = 1000 - 12 = 988 (=13 \cdot 76)$

Assim, podemos calcular n usando a fórmula geral da PA.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 988 = 104 + (n-1)13 \Rightarrow 988 - 104 = (n-1)13 \Rightarrow 884/13 = (n-1) \Rightarrow 68 = n - 1 \Rightarrow n = 69$$

8) Quantos múltiplos de 14 existem entre 200 e 4000?

Resposta

Calcular o número de termos de uma PA de razão 14, com $a_1=210$ e $a_n=3990$ (primeiro e último múltiplos de 14 entre 2000 e 4000).

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$3990 = 210 + (n - 1) \cdot 14$$

Portanto $n = 271$

9) O Supermercado COMABEM lançou uma campanha publicitária na qual afirma que o vencedor receberá um bônus de R\$ 300,00 mensais em compras, e que esse bônus aumentará em R\$ 50,00 a cada mês. Se o sortido cliente receber esse bônus durante 5 anos, qual será o total recebido?

Resposta

Os prêmios recebidos mensalmente constituem uma PA de primeiro termo $a_1=300$ e razão $r = 50$. Como a promoção tem a duração de 5 anos, o cliente receberá $5 \cdot 12 = 60$ bônus.

O valor do último prêmio é dado por $a_{60} = 300 + (60 - 1) \cdot 50 = 3250$

Total recebido será a soma $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Portanto, o total recebido será de $\frac{(300 + 3250)}{2} \cdot 60 = \text{R\$ } 106.500,00$.

10) Determine a razão e o primeiro termo de uma PA sabendo que seu terceiro termo é 7 e o quinto, 15.

Resposta

Temos:

$$a_3 = 7 \Rightarrow a_1 + 2r = 7$$

$$a_5 = 15 \Rightarrow a_1 + 4r = 15$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, temos:

$$a_1 - a_1 + 4r - 2r = 15 - 7 \Rightarrow 2r = 8 \Rightarrow r = 4$$

Substituindo r na primeira equação:

$$a_1 + 2r = 7 \Rightarrow a_1 + 2 \cdot 4 = 7 \Rightarrow a_1 = 7 - 8 = -1$$

11) As sequências numéricas a seguir são PA ou PG? Indique a razão em ambos os casos.

a) $S_1 = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$

b) $S_2 = \{1, -2, 4, -8, 16, \dots\}$

c) $S_3 = \{1, -1, -3, -5, -7, \dots\}$

d) $S_4 = \{27, 9, 3, 1, 1/3, \dots\}$

Resposta

a) PA de razão 3, pois $5 - 2 = 8 - 5 = \dots = 3$.

b) PG de razão -2 , pois $-2 : 1 = 4 : (-2) = (-8) : 4 = \dots = -2$.

- c) PA de razão -2 , pois $-1-1 = -3 - (-1) = \dots = -2$.
d) PG de razão $1/3$, pois $9/27 = 3/9 = \dots = 1/3$.

12) Escreva uma PG:

- a) de 5 termos, onde $a_1 = 2$ e $q=3$
b) de 4 termos, onde $a_1 = -2$ e $q = 2$
c) de 6 termos, onde $a_1 = 1/2$ e $q = -2$
d) de 5 termos, onde $a_1 = 1/2$ e $q = -1/3$

Resposta

- a) (2, 6, 18, 54, 162)
b) (-2, -4, -8, -16)
c) (1/2, -1, 2, -4, 8, -16)
d) (1/2, -1/6, 1/18, -1/54, 1/162)

13) Numa festa, quando a música começou a tocar, os casais começaram a entrar na pista de dança. Uma pessoa reparou que a cada minuto cada casal na pista chamava outro casal. Se havia um casal na pista quando a música começou, quantas pessoas estavam na pista após 5 minutos de música? Qual é o tipo de sequência que expressa o número de pessoas após n minutos?

Resposta

Início: 2 pessoas
1 minuto: 4 pessoas ($4 = 2^2$)
2 minutos: 8 pessoas ($8 = 2^3$)
 n minutos: 2^{n+1} pessoas
Em 5 minutos, temos $2^6 = 64$ pessoas
A sequência é uma PG com primeiro termo 4 e razão 2.

13) Uma montadora de automóveis produziu 20.000 carros no ano passado. Se a demanda tende a crescer 10% por ano, calcule quantos automóveis serão produzidos daqui a três anos.

- a) 26.000 b) 26.400 c) 26.600 d) 26.620 e) 26.700

Resposta

Alternativa: **D**

O número de automóveis produzidos daqui a n anos é dado por:

$N = 20000 \cdot (1 + 0,1)^n = 20000 \cdot (1,1)^n$
Portanto, daqui a três anos serão produzidos:
 $N = 20000 \cdot (1,1)^3 = 26.620$ carros.

14) Sabendo que o primeiro termo de uma PG é positivo, o quarto termo é 192 e o segundo termo é 12, calcule o primeiro e o sétimo termo.

Resposta

Aplicando a regra geral dos termos de uma PG, temos:

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 192$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 12$$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos:

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = a_1 \cdot q \cdot q^2 = 12 \cdot q^2 = 192$$

$$q^2 = 192/12, q^2 = 16, q = 4 \text{ ou } q = -4$$

$$\text{Para } q = 4, \text{ temos: } a_1 \cdot q = 12, a_1 = 3$$

Para $q = -4$, temos: $a_1 \cdot q = 12, a_1 = -3$ (não vale, pois o primeiro termo deve ser positivo)

Para calcular o sétimo termo, temos:

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 = 3 \cdot 4^6 = 12288$$

15) Calcule x e y , sabendo que $(1, x, y)$ é uma PG de razão positiva e $(x, y, 6)$ é uma PA.

Resposta

$$x^2 = 1 \cdot y \Rightarrow y = x^2$$

$$y = \frac{x+6}{2} \Rightarrow 2y = x + 6 \quad \text{substituindo } y = x^2 \text{ na equação, temos:}$$

$$2 \cdot x^2 = x + 6 \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \quad \text{resolvendo:}$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y = 2^2 \Rightarrow y = 4$$

Para $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{4}$ (não serve, pois foi dado que a razão da PG é positiva)

Portanto, $x = 2$ e $y = 4$

16) Calcule a soma dos elementos da PG infinita $(1, 1/2, 1/4, \dots)$. Depois, usando calculadora, calcule e some os 8 primeiros termos da PG. Verifique então que seu resultado empírico se aproxima do teórico com erro menor que 0,01.

Resposta

Usando a fórmula de soma dos termos de uma PG infinita (convergente),

temos:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Usando a calculadora, temos:

$$S_{12} = 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 + 0,03125 + 0,015625 + \\ + 0,0078125 = 1,992188$$

$$\text{Diferença entre teórico e empírico: } 2 - 1,992188 = 0,0078125 < 0,01$$

17) Num quadrado de 1m de lado, tomamos o ponto médio de cada lado e traçamos outro quadrado, inscrito no primeiro. Repetindo esse processo indefinidamente, qual será a soma das áreas de todos os quadrados obtidos?

Resposta

$$a_1 = \text{área do primeiro quadrado} = 1\text{m}^2$$

O lado do segundo quadrado é a hipotenusa de um triângulo retângulo:

$$l^2 = (0,5)^2 + (0,5)^2 = l^2 = 0,25 + 0,25 = 0,5$$

$$a_2 = \text{área do segundo quadrado} = l^2 = 0,5 \text{ m}^2$$

As áreas sucessivas formam uma PG de razão $\frac{1}{2}$. Portanto, a soma de todas as áreas obtidas é:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-0,5} = 2\text{m}^2$$

18) Calcule a soma dos 10 primeiros termos da PG $(1, 2, 4, 8, \dots)$

Resposta

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 1 \cdot \frac{(1-1024)}{(1-2)} = 1 \cdot \frac{(-1023)}{(-1)} = 1023$$

19) Calcule a soma dos 10 primeiros termos da PG onde $a_1=1/4$ e $q=2$.

Resposta

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(-1023)}{(-1)} = 255,75$$

20) Calcule a soma dos 10 primeiros termos da PG (1, 2,4,8...)

Resposta

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 1 \cdot \frac{(1-1024)}{(1-2)} = 1 \cdot \frac{(-1023)}{(-1)} = 1023$$

21) Determine a fração geratriz da dízima periódica 0,1717...

Resposta

$$\begin{aligned} 0,1717 \dots &= 0,17 + 0,0017 + 0,000017 + \dots = \\ &= \frac{17}{100} + \frac{17}{10000} + \frac{17}{1000000} + \dots = \\ &= \frac{17}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots \right) = \frac{17S}{100} \end{aligned}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{100}{99}$$

$$\frac{17S}{100} = \frac{17}{99}$$

Logo, a fração geratriz da dízima é $\frac{17}{99}$

:

22) Um capital C_0 é investido a 10% ao ano de juros compostos.

a) Qual é o valor obtido após 5 anos?

b) Usando o conceito de PG, escreva o termo geral que fornece o montante obtido de um capital (considere a_1 como o capital inicial).

b) Escreva os montantes obtidos de um capital inicial de R\$ 1000,00 a cada um dos primeiros 10 anos (considere a_1 como o capital inicial).

c) Escreva os termos dessa PG. .

Resposta

a) Iremos utilizar uma expressão da matemática financeira dada por:

$C = C_0 \cdot (1 + i)^n$, em que i é a taxa de juro , n o tempo e C_0 o capital inicial. $C = C_0 \cdot (1 + 0,1)^5 \Rightarrow C = C_0 \cdot (1,1)^5$

b) Termo Geral da PG: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow C = C_0 \cdot (1,1)^{n-1}$ onde n é a número de termos da PG , C_0 é o primeiro termo e 1,1 é a razão.

c) PG (R\$1000,00; R\$ 1100,00; R\$ 1210,00; R\$ 1331,00; R\$ 1464,10; R\$ 1610,51; R\$1771,56; R\$1948,72; R\$ 2143,59; R\$ 2357,95)