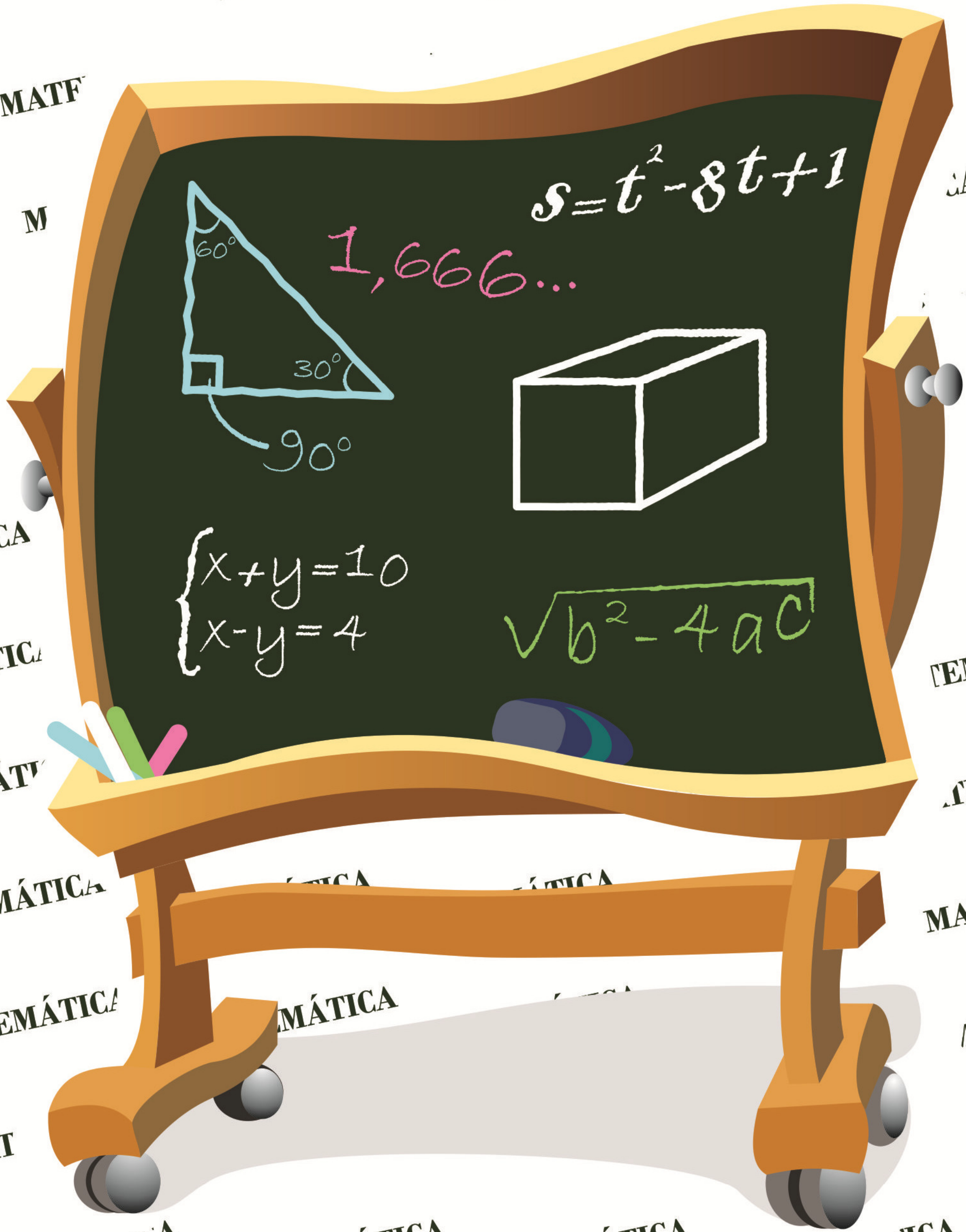
# MATEMATICA




FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

ETEVM
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

GOVERNO DO Rio de Janeiro

# 3º ANO

# Geometria analítica

# RETA

## Parte 2

# Apresentação

Muitas vezes nossos alunos nos perguntam: Para que estou aprendendo este conteúdo? Onde vou utilizar isto?

Pensando nisso, procurei nesse trabalho desenvolver o conteúdo de geometria analítica mostrando uma situação real de uma fabricante e no desenrolar do aprendizado criei situações e soluções necessárias para o bom funcionamento de sua fabrica. Através dessas situações e soluções procurei ensinar os conhecimentos de geometria analítica de uma maneira bem clara e simples.

É importante que o aluno saiba que sempre existirá um modelo matemático que irá ajudá-lo na solução de problemas em sua vida profissional e social.

Espero que esta obra contribua de alguma forma no aprendizado dos nossos alunos e também no trabalho do professor em sala de aula.

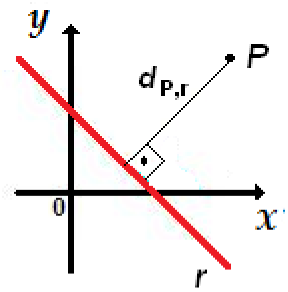
Sugestões e críticas que visem aprimorar esta obra serão sempre bem-vindas.

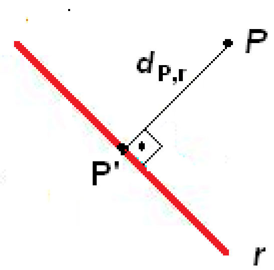
**Sergio Lopes Rodrigues**

.

# Distância de um ponto a uma reta

Veremos agora como calcular a distância entre um ponto **P** e uma reta **r**. Essa distância é a medida da distância entre **P** e sua projeção ortogonal **P`** sobre a reta **r**.




Veja a seguinte situação:

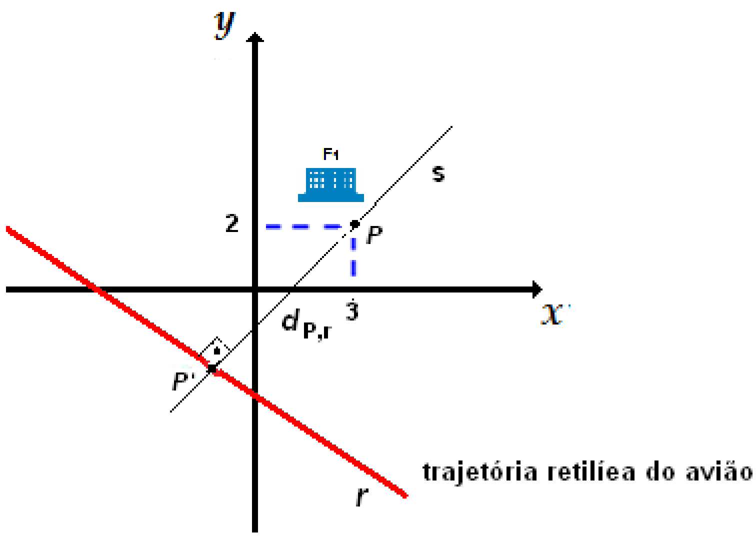
Vimos que a posição da **fabrica 1** no mapa situado sobre o sistema cartesiano é dada pelo ponto **P(3,2)**. Sabe-se que um avião, sobrevoando a região, descreve uma trajetória retilínea segundo a equação 3x + 4y + 13 = 0. Qual a distância da **fabrica 1** ao avião quando ele se encontra mais próximo dela?

Existe uma fórmula para cálculo dessa distância, mas caso esquecermos a fórmula usaremos o seguinte prosseguimento:

A **distância mais próxima** da fabrica ao avião será a distância entre o ponto P(3,2) onde fica situada a fabrica e a sua projeção ortogonal **P'** sobre a trajetória retilínea do avião representada pela equação 3x + 4y + 13 = 0.

Sendo assim, para calcular a distância do ponto P(3, 2) à reta r, de equação

3x + 4y + 13 = 0, primeiramente devemos encontrar a equação de **uma outra reta s** que passa por **P** e é perpendicular a **r** no ponto **P'** . Como **P'** é o ponto de interseção das retas **r** e **s**, para resolver o problema basta calcular a distância entre **P** e **P'**.




Resolução

Primeiramente iremos calcular a **equação da reta s perpendicular a r.**

**Coeficiente angular de r:**

$3x + 4y + 13 = 0 \quad => \quad 4y = -3x - 13 \quad => \quad y = -\frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$

Como, $y = mx + c \quad => \quad m_r = -\frac{3}{4}$

Como as retas são perpendiculares, temos:

$m_s = -\frac{1}{m_r} \quad => \quad m_s = -\frac{1}{-\frac{3}{4}}$

Então, $m_s = \frac{4}{3}$

Usando a fórmula para determinação de uma reta conhecendo um ponto P$(x_o, y_o)$ e o coeficiente angular **m** da reta, temos:

P(3, 2) $\quad m_s = \frac{4}{3}$

$y - y_0 = m(x - x_o) \quad => \quad y - 2 = \frac{4}{3}\ (x - 3)$

$y - 2 = \frac{4}{3}\ (x - 3) \quad => \quad y - 2 = \frac{4}{3}\ x - 4$

$3y - 6 = 4x - 12 \quad => \quad 4x - 3y - 6 = 0$

Como **P’** é a interseção de r e s, para obtermos, basta resolver o sistema formado pelas equações de r e s.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 13 = 0 \\ 4x - 3y - 6 = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} 3x + 4y = -13 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$$

Nesse caso, é mais fácil resolver o sistema pelo método da adição.

O **método da adição** consiste em somar as duas equações membro a membro de modo que uma das incógnitas desapareça.

Uma das incógnitas só desaparecerá na adição se os seus coeficientes forem simétricos. Quando não forem, será preciso ajeitar as equações para torná-los simétricos.

Nesse caso para tornar os coeficientes **y** simétricos devemos multiplicar a primeira equação por 3 (coeficiente de **y** na segunda equação) e a segunda equação por 4 (coeficiente de **y** da primeira equação).

3x + 4y = -13 . ( 3 ) => 9x + 12y = -39

4x - 3y = 6 . ( 4 ) => 16x - 12y = 24

25x = - 15

11x = 44

x $= -\frac{15}{25}$

x $= -\frac{3}{5}$

Substituindo **x** em qualquer uma das equações, como por exemplo a primeira, temos:

3x + 4y = -13

3. $(-\frac{3}{5})$ + 4y = -13

$-\frac{9}{5}$ + 4y = -13

4y = -13 + $\frac{9}{5}$

20 y = - 65 + 9

20 y = - 56

y = $-\frac{56}{20}$

y = $-\frac{14}{5}$

Logo, **P'** ($-\frac{3}{5}$, $-\frac{14}{5}$)

Calculando a distância do ponto P (3, 2) e **P'** ($-\frac{3}{5}$, $-\frac{14}{5}$):

Como já vimos, para calcular a distância entre pois pontos usamos a fórmula:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d = \sqrt{(-\frac{3}{5} - 3)^2 + \left(-\frac{14}{5} - 2\right)^2}$$

$$d = \sqrt{(-\frac{18}{5})^2 + \left(-\frac{24}{5}\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{324}{25} + \frac{526}{25}}$$

$$d = \sqrt{\frac{900}{25}}$$

$$d = \frac{30}{5}$$

$$d = 6$$

Portanto, a distância da fabrica ao avião quando ele se encontra mais próximo dela é 6 km.

**Usando o mesmo procedimento acima, para um ponto P($x_P, y_P$) e uma reta r de equação ax + by + c = 0, obtemos a fórmula abaixo, para cálculo da distância entre p e r.**

$$d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Usando a fórmula para cálculo da distância da fabrica ao avião, temos:

P( 3, 2) ,  r: 3x + 4y + 13 = 0

$$d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|3.3 + 4.2 + 13|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|30|}{\sqrt{25}}$$

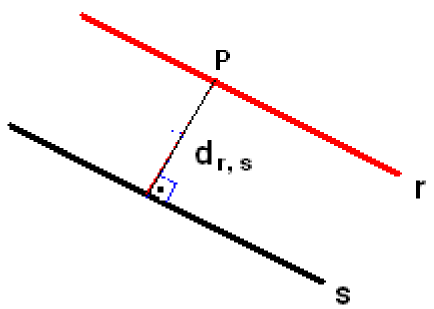
$$d_{P,r} = \frac{30}{5}$$

$$d_{P,r} = 6$$

## Distância entre duas retas paralelas

Em certos problemas, como por exemplo, cálculo da distância entre duas retas paralelas, podemos usar a fórmula da distância entre ponto e reta, veja:

Calcule a distância entre as retas paralelas **r:** 2x + y + 3 = 0 e **s:** 2x + y + 13 = 0.



Como as retas são paralelas, a distância entre elas é igual a distância de qualquer ponto de uma delas à outra reta.

Calculando as coordenadas de um ponto qualquer da reta **r:** 2x + y - 3 = 0.

Para x = 0, temos: 2 **.** 0 + y - 3 = 0 => y = 3

Logo,P(0, - 3)

Calculando a distância entre o ponto P(0, - 3) e a reta s: 2x + y - 13 = 0 .

$$d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|2.0 + 1\,.3 - 13|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|-10|}{\sqrt{5}}$$

$$d_{P,r} = \frac{10\,.\,\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}$$

$$d_{P,r} = \frac{10.\sqrt{5}}{5}$$

$$d_{P,r} = 2\sqrt{5}$$

Portanto, a distâncias entre as retas **r** e **s** é $2\sqrt{5}$

**É possível obter uma fórmula para calcular a distância entre duas retas paralelas. Veja:**

Seja as retas:

r: **ax + by + c = 0**

s: **a'x + b'y + c' = 0**

Como as retas são paralelas **a = a' e b = b'**, então:

r: ax + by + c = 0

s: ax + by + c' = 0

Como vimos, a distância entre as retas **r** e **s** é igual a distância entre um ponto qualquer de **s** à reta **r**. Então, sendo um ponto **P**$(x_P, y_P)$ pertencente a **s**, temos:

$ax_p + by_p + c' = 0$

$ax_p + by_p = - c'$

Calculando a distância de P$(x_P, y_P)$ à reta r: ax + by + c = 0, obtemos:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Como $ax_p + by_p = - c'$ , temos:

$$d_{P,r} = \frac{|- c' + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Portanto, a fórmula para obter a **distância entre duas retas paralelas** é dada pela fórmula:

$$\boxed{d_{r,s} = \frac{|C - C`|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Calculando a distância entre as retas **r:** 2x + y + 3 = 0 e **s:** 2x + y + 13 = 0 pela fórmula.

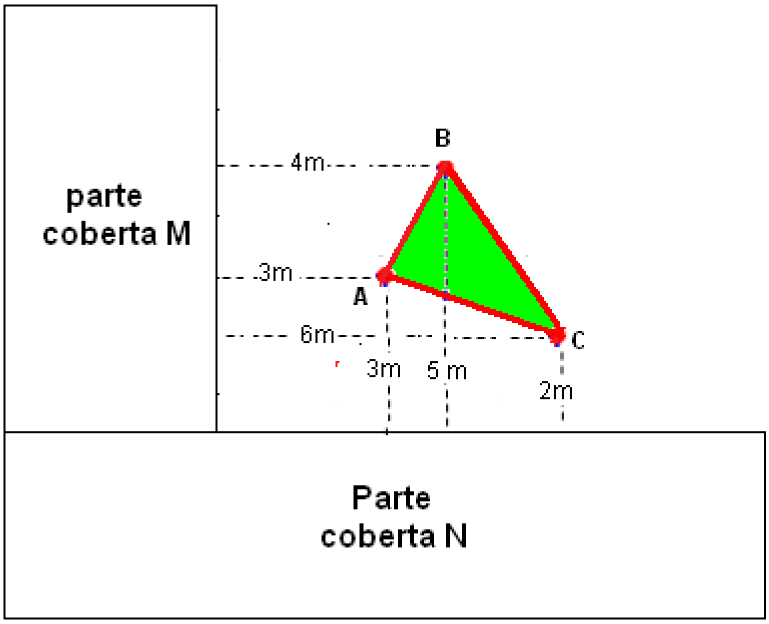
$$d_{r,s} = \frac{|C - C`|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{r,s} = \frac{|13 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \quad => \quad d_{r,s} = \frac{10}{\sqrt{5}} \quad => \quad d_{P,r} = \frac{10.\sqrt{5}}{5} \quad => \quad d_{P,r} = 2\sqrt{5}$$

## Área de uma superfície triangular formada por três pontos no plano cartesiano.

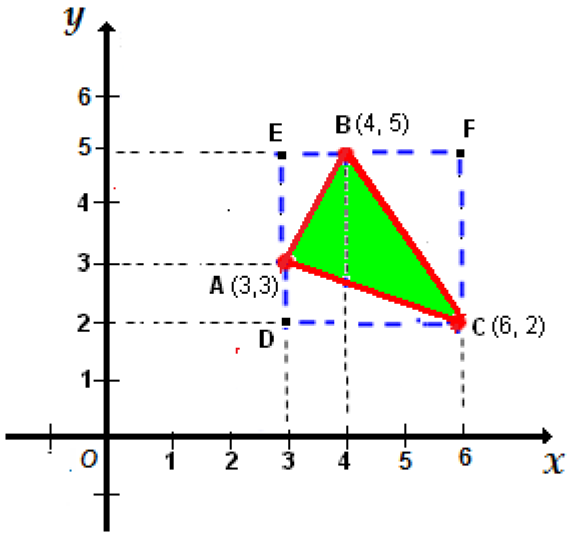
Veja a seguinte situação:

O fabricante deseja construir um jardim de forma triangular na parte descoberta de uma de suas fabricas. Conforme figura:




Ficou definido que o vértice A do triângulo ficaria a 3m de distância da parte coberta M e N. O vértice B ficaria a 4m de distância da parte coberta M e 5m da parte coberta N e o vértice C, 6m de M e 2m de N. Sabe-se que as partes cobertas são perpendiculares. Agora se deseja saber qual seria a área do jardim.

Transportando os dados para o plano cartesiano temos:




Observando a figura acima, vemos que uma das maneiras de se calcular a área do triângulo ABC, é subtraindo as áreas dos triângulos retângulos, ADC, AEB e BFC da área do quadrilátero CDEF.

$$A_{\Delta ABC} = A_{\blacksquare CDEF} - (A_{\Delta ADC} + A_{\Delta AEB} + A_{\Delta BFC})$$

$$A_{\Delta ABC} = (6-3).(5-2) - [\frac{(6-3).(3-2)}{2} + \frac{(4-3).(5-3)}{2} + \frac{(6-4).(5-2)}{2}]$$

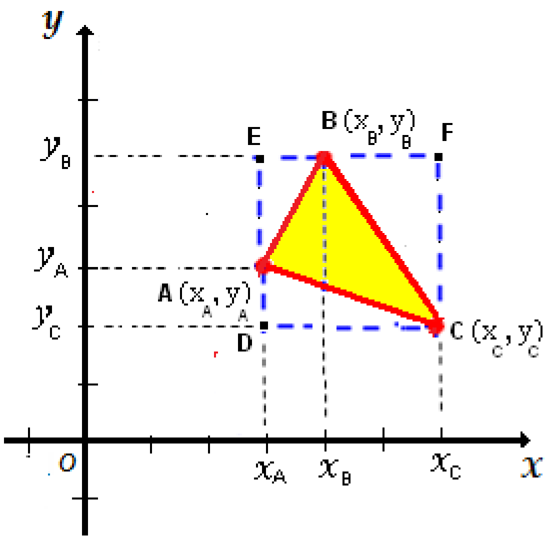
$$A_{\Delta ABC} = 3 \;.\; 3 - [\frac{3\;.\;1}{2} + \frac{1\;.\;2}{2} + \frac{2\;.\;3}{2}]$$

$$A_{\Delta ABC} = 9 - [\,1{,}5 + 1 + 3]$$

$$A_{\Delta ABC} = 3{,}5$$

Portanto, a área do jardim seria 3,5 $m^2$.

Podemos obter uma expressão para calcular a área do triângulo quando conhecemos as coordenadas de seus vértices, fazendo os cálculos algebricamente, veja:




$A_{\Delta ABC} = A_{\blacksquare CDEF} - (A_{\Delta ADC} + A_{\Delta AEB} + A_{\Delta BFC})$

$A_{\Delta ABC} = (x_C - x_A).(y_B - y_C) - [\frac{(x_C - x_A).(y_A - y_C)}{2} + \frac{(x_B - x_A).(y_B - y_A)}{2} + \frac{(x_C - x_B).(y_B - y_C)}{2}]$

$A_{\Delta ABC} = x_C\,.y_B - x_C\,.y_C - x_A\,.y_B + x_A\,.y_C - \frac{1}{2}[x_C\,.y_A - x_C\,.y_C - \cancel{x_A\,.y_A} + x_A\,.y_C$

$+ \cancel{x_B\,.y_B} - x_B\,.y_A - x_A\,.y_B + \cancel{x_A\,.y_A} + x_C\,.y_B - x_C\,.y_C - \cancel{x_B\,.y_B} + x_B\,.y_C\,]$

$2A_{\Delta ABC} = 2x_C\,.y_B - 2x_C\,.y_C - 2x_A\,.y_B + 2x_A\,.y_C - x_C\,.y_A + 2\,x_C\,.y_C - x_A\,.y_C$

$+ x_B\,.y_A + x_A\,.y_B - x_C\,.y_B - x_B\,.y_C$

$2A_{\Delta ABC} = x_C\,.y_B - x_A\,.y_B + x_A\,.y_C - x_C\,.y_A + x_B\,.y_A - x_B\,.y_C$

$2A_{\Delta ABC} = x_C\,.y_B + x_A\,.y_C + x_B\,.y_A - [x_A\,.y_B + x_C\,.y_A + x_B\,.y_C\,]$

Podemos verificar que a expressão $x_C\,.y_B + x_A\,.y_C + x_B\,.y_A - [x_A\,.y_B + x_C\,.y_A + x_B\,.y_C\,]$ corresponde ao módulo do determinante ( $|D|$ ), sendo:

D = $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$

Então, $2A_{\Delta ABC} = |D|$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{|D|}{2}$$

Portanto, a área de um triângulo qualquer de vértices A($x_A$ , $y_A$ ), B( $x_B$ , $y_B$ ), C($x_C$, $y_C$ ) é a metade do módulo do determinante construído a partir das coordenadas dos pontos.

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{|D|}{2}$$

Agora vamos calcular a área do jardim utilizando a fórmula:

A(3, 3), B(4, 5) e C(6, 2)

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 6 & 2 \end{array} \right.$$

D = 3 . 5 . 1 + 3 . 1 . 6 + 1 . 4 . 2 - [ 1 . 5 . 6 + 3 . 1 . 2 + 3 .4 .1 ]

D = 15 + 18 + 8 – [ 30 + 6 + 12 ]

D = 41 – 48

D = - 7

$$A = \frac{|D|}{2} \quad => \quad A = \frac{|-7|}{2} \quad => \quad A = \frac{7}{2}$$

$A$ = 3,5

Portanto, confirmando, a área do jardim seria 3,5 $m^2$.

O interessante é que conseguimos calcular a área do jardim triangular sem conhecermos as medidas dos seus lados. Os dados foram retirados tomando como ponto de referência as partes cobertas da fabrica que eram perpendiculares.

## Alinhamentos de três pontos

Outra coisa interessante que podemos observar que se **o determinante formado pelas coordenadas dos três pontos for zero**, a área do triângulo será zero, portanto, não existirá o triângulo. Logo, podemos concluir que se não existe o triângulo, os pontos estão alinhados, ou seja, são colineares.

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo:

Verifique se os pontos A(1, 4), B(3, 7) e C(5, 10) estão alinhados.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 10 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \\ 5 & 10 \end{matrix}$$

D = 1 . 7 . 1 + 4 . 1 . 5 + 1 . 3 . 10 - [ 1 . 7 . 5 + 1 . 1 . 10 + 4 .3 .1 ]

D = 7 + 20 + 30 – [ 35 + 10 + 12 ]

D = 57 – 57

D = 0

Logo, os pontos A(1, 4), B(3, 7) e C(5, 10) estão alinhados.

Anteriormente, usávamos conceito de **coeficiente angular** para verificar se três pontos são colineares. Agora aprendemos que também podemos verificar usando o **conceito de determinante**.

## Equação da reta

Podemos usar também o conceito de determinante para obter uma equação da reta conhecendo dois de seus pontos, veja:

Determine a equação da reta que passa pelos pontos A( 2, 3) e B( 4, 7).

Consideremos os pontos A( 2, 3) e B( 4, 7) e um **ponto genérico** C(x, y) que estejam alinhados. Para que os pontos A, B e C estejam alinhados, ou seja, pertencem a mesma reta, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{matrix} = 0$$

3x + 4y + 12 – [ 12 + 7x + 2y ] = 0

3x + 4y + 14 - 12 – 7x - 2y = 0

- 4x + 2y + 2 = 0

Colocando  o coeficiente de x positivo, temos:

4x – 2y – 2 = 0

Portanto, a equação da reta que passa pelos pontos A( 2, 3) e B( 4, 7) é

4x – 2y – 2 = 0

Dados dois pontos distintos **A**($x_A$ , $y_A$ ) e **B**( $x_B$ , $y_B$ ), podemos obter uma equação da reta que passa por **A** e **B** a partir de:

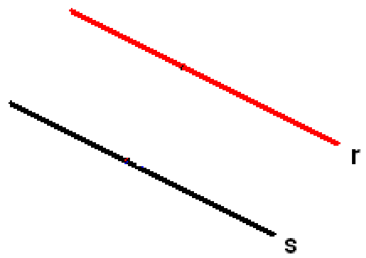
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

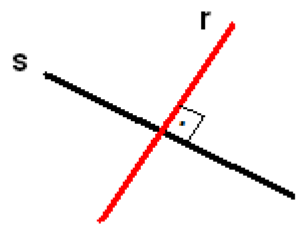
Sendo P(x, y) um ponto genérico de **r**.

## Ângulos entre duas retas

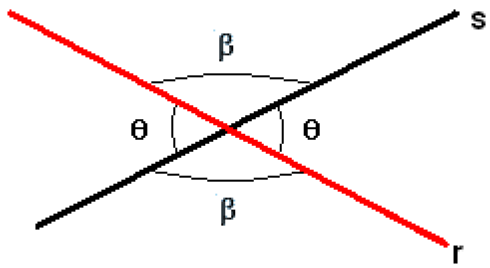
Dados duas retas **r** e **s**, vamos determinar o **ângulo agudo $\boldsymbol{\theta}$** formado entre elas:

Caso as retas sejam **paralelas** ou **perpendiculares** a resposta é imediata. O ângulo $\boldsymbol{\theta}$ formado entre elas são respectivamente $\theta = 0^o$ ou $\theta = 90^o$.



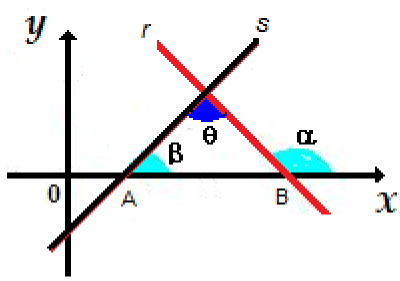

Caso as retas sejam concorrentes e não perpendiculares, temos:




Veja que o ângulo $\boldsymbol{\theta}$ é **agudo** e o ângulo $\boldsymbol{\beta}$ **obtuso**. Portanto, se quisermos determinar o ângulo obtuso $\boldsymbol{\beta}$ basta diminuir o ângulo $\theta$.de $180^o$. ( Lembrete $\theta + \beta = 180^o$)

Vamos lá:

Agora iremos determina o ângulo **agudo $\boldsymbol{\theta}$** entre duas retas **r** e **s** concorrentes e não perpendiculares no plano cartesiano quando **conhecemos os coeficientes angulares das retas.**



Observando a figura, pelo teorema do ângulo externo de um triângulo

temos:

$\boldsymbol{\alpha = \theta + \beta} \quad => \quad \boldsymbol{\theta = \alpha - \beta}$

Daí:

$\boldsymbol{tg\theta = tg(\alpha - \beta)}$

**Teorema do ângulo externo**.
Em um triângulo, a medida de um **ângulo externo** é igual à soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes a ele.

Lembrando a fórmula da tangente da diferença entre dois arcos **a** e **b**,

$\boldsymbol{tg(a - b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}}$ , temos:

$$\boldsymbol{tg\theta = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}}$$

Como os coeficientes angulares de **r** e **s** são, respectivamente, $\boldsymbol{m_r = tg\alpha}$ e $\boldsymbol{m_s = tg\beta}$**,** vem:

$$\boldsymbol{tg\theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}}$$

Visto que $\boldsymbol{\theta}$ é **agudo**, ou seja, $0 < \boldsymbol{\theta} < 90^o$, temos $\boldsymbol{tg\theta} > 0$, ou seja, **positivo**. Assim:

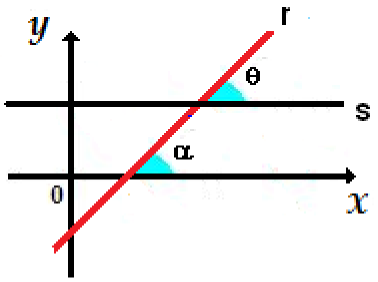
$$\boxed{\boldsymbol{tg\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|}}$$

, para qualquer posição de **r** e **s**.

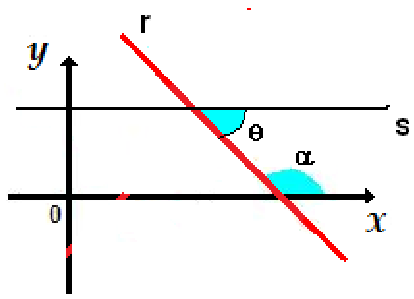
Lembrando, se quisermos o ângulo **obtuso** é só diminuir o ângulo **agudo** de **180º**.

É importante observar que temos outros casos em relação ao ângulo $\boldsymbol{\theta}$ formados pelas retas, veja:

- Uma das retas é horizontal, ou seja, paralela ao eixo **x**.




$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\alpha}$ **,** se $0 < \boldsymbol{\alpha} < 90^o$




$\boldsymbol{\theta} = 180^o - \boldsymbol{\alpha}$ **,** se $90^o < \boldsymbol{\alpha} < 180^o$

Como nesses casos $\boldsymbol{m_s}$= 0, a expressão da $\boldsymbol{tg\theta} = \left|\frac{\boldsymbol{m_r} - \boldsymbol{m_s}}{1 + \boldsymbol{m_r} \cdot \boldsymbol{m_s}}\right|$, se reduz a $\boldsymbol{tg\theta} = |\boldsymbol{m_r}|$.

- Uma das retas é vertical, ou seja, paralela ao eixo **y**.

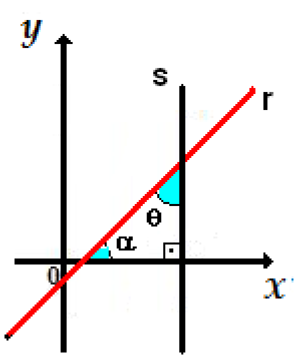



FIG 1

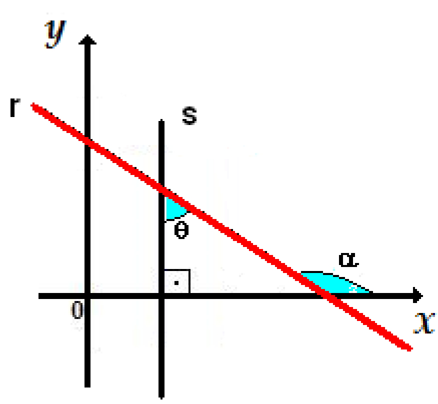



FIG 2

Observando a figura 1, temos:

$$\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\alpha} = 90^o \quad \Rightarrow \boldsymbol{\theta} = 90^o - \boldsymbol{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{tg\theta} = \boldsymbol{tg}(90^o - \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\boldsymbol{sen}(90^o - \boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{cos}(90^o - \boldsymbol{\alpha})} = \frac{\boldsymbol{cos\alpha}}{\boldsymbol{sen\alpha}}$$

Assim:

$$\boldsymbol{tg\theta} = \frac{\boldsymbol{cos\alpha}}{\boldsymbol{sen\alpha}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{tg\alpha}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m_r}}$$

Analogamente, quando $90^o < \alpha < 180^o$( fig. 2), encontraríamos $\boldsymbol{tg\theta} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m_r}}$.

Portanto, para os dois casos:

$$\boxed{\boldsymbol{tg\theta} = \left|\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m_r}}\right|}$$

**Exemplo resolvido**

Determine o ângulo formado entre as retas r: 3x - y + 4 = 0 e s: 2x + y - 8 = 0.

Solução:

Primeiramente vamos determinar o coeficiente angular de cada uma das retas dadas.

Neste caso, vamos colocar a equação da reta na sua forma reduzida e obter o coeficiente angular.

Para a reta r, temos:
y = 3x + 4
$m_r = 3$
Para a reta s, temos:
y = – 2x + 8
$m_s = -2$

Aplicando a fórmula para obter o ângulo entre duas retas, temos:

$$tg\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$

$$tg\theta = \left|\frac{3-(-2)}{1 + 3 \cdot (-2)}\right|$$

$$tg\theta = \left|\frac{5}{-5}\right|$$

$$tg\theta = |-1|$$

$$tg\theta = 1$$

$\theta = arc\ tg\ 1$ , ou seja, $\theta$ é o a ângulo cuja tangente é igual a 1, portanto

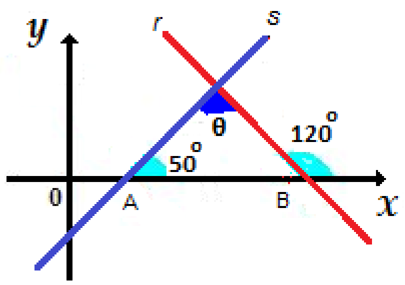
$\theta$ = 45º. $(lembrete\ tg45^o = 1)$

**Vale lembrar** que se tivermos os ângulos de inclinação das retas devemos usar o **teorema do ângulo externo** de um triângulo **para obter o ângulo formado por elas.**

Veja:

Determine o ângulo formado pelas retas **r** e **s** que têm ângulo de inclinação 120° e 50°, respectivamente.

**Solução:**




Pelo teorema do ângulo externo de um triângulo, temos:

120° = 50° + $\boldsymbol{\theta}$ => $\boldsymbol{\theta}$ = 70°

**Exercícios**

1) Calcule a distância do ponto **P**(5,7) à reta 4x - 3y + 2 = 0.

2) Encontre a distância entre as retas paralelas r: 3x – 4y + 2 = 0 e s: 6x – 8y – 3 = 0.

3) Determine a área do triângulo cujos vértices são (3, -2), (5, 2) e (4, 4).

4) Calcule a área do quadrilátero de vértices A(5,3), B( -3,6), C( -5,0) e D(2,-3). (Sugestão: decomponha o quadrilátero em dois triângulos)

5) Verifique se estão alinhados os pontos A,B, C nos seguintes casos:

a) A(3,4) , B(1, 2) e C(0,3)

b) A( 3,-1) , B(-2, -6) e C(8,4)

6) Os pontos A(1, 2), B(**x**, 0) e C(3, 4) são colineares. Qual é o valor de **x** ?

7) UFUMG- O ângulo agudo formado pelas retas 2x – y + 2 = 0 e 3x + y + 1 = 0 é:

a) 15º b) 30º c) 45º d) 60º e) 75º

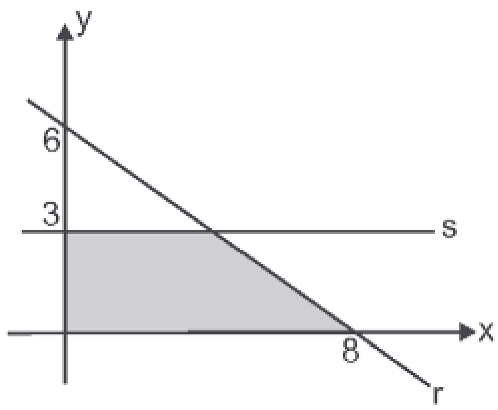
8) Determine o ângulo agudo formado pelas retas de equações x = 0 e $\sqrt{3}$ x + y – 2 = 0.

9) O ponto **A**(-1,-2) é vértice de um triângulo ABC cujo lado $\overline{BC}$ está sobre a reta de equação x + 2y – 5 = 0. Determine a medida da altura relativa ao vértice **A** desse triângulo.

10) (Unicamp-SP) Considere, no plano *xy*, as retas $y = 1$, $y = 2x - 5$ e $x - 2y + 5 = 0$.

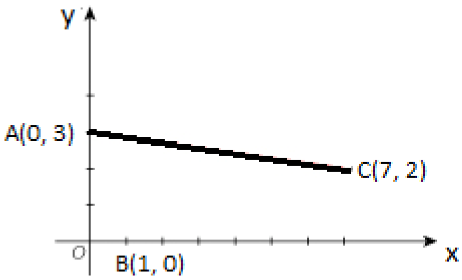
a) Quais são as coordenadas dos vértices do triângulo *ABC* formado por essas retas?
b) Qual é a área do triângulo *ABC*?

11) (ESPM-SP) A figura abaixo representa um trapézio delimitado pelas retas *r* e *s* e pelos eixos cartesianos. A reta *t*, que passa pela origem e que divide esse trapézio em duas partes de mesma área, tem coeficiente angular igual a:




a) $\frac{9}{20}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{3}{4}$

12) (UFSC-SC) A figura abaixo representa parte do mapa de uma cidade, em que o ponto O é o centro e os pontos A, B e C são pontos turísticos (considere 1 unidade linear do plano cartesiano correspondendo a 1 km).




Com base na figura acima, assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S).

(  ) Se o prefeito da cidade deseja colocar um novo terminal de ônibus que fique equidistante dos pontos A, B e C, então sua localização deve ser o ponto T de coordenadas$\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

.

(  ) A equação da reta que representa a estrada reta e asfaltada que liga os pontos A e C é x + 7y + 21 = 0.

(  ) Se o prefeito da cidade deseja construir um trecho de estrada reto, o mais curto possível, unindo o ponto B com a estrada reta e asfaltada que já liga os pontos A e C, então o comprimento mínimo desse trecho será de 2 km.

(  ) A área da região triangular ABC, a partir dos pontos A, B e C que formam o “triângulo turístico” da cidade é de 10 $km^2$.

## Bibliografia

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. São Paulo, Ática, 2014.

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva – São Paulo, Moderna, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto. Novo Olhar matemática. São Paulo, FTD, 2013.

IEZZI, Gelson. Fundamentos matemática elementar. São Paulo, Atual, 2005