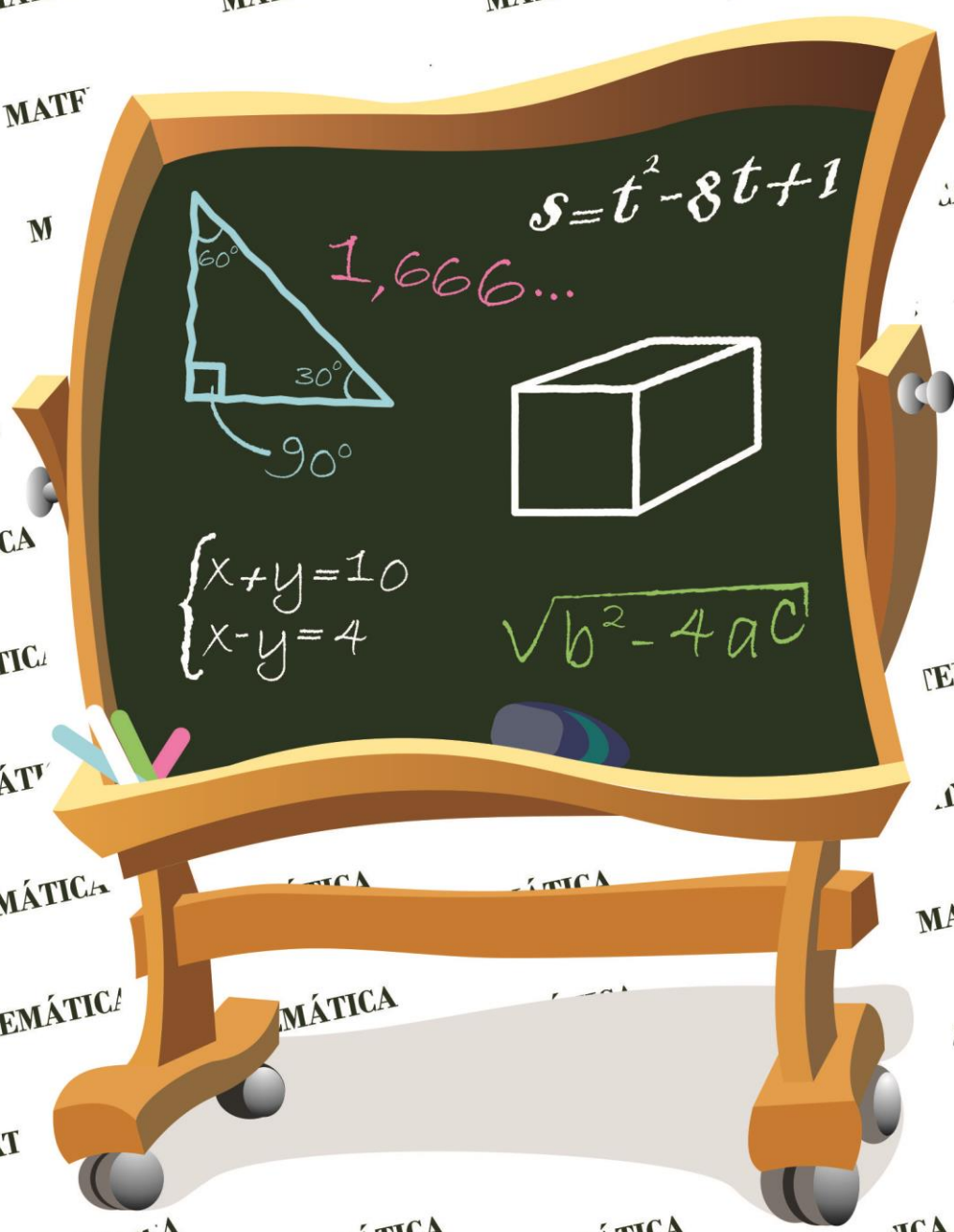


MATEMÁTICA



3º ANO

Geometria analítica

RETA

Parte 1



Apresentação

Muitas vezes nossos alunos nos perguntam: Para que estou aprendendo este conteúdo? Onde vou utilizar isto?

Pensando nisso, procurei nesse trabalho desenvolver o conteúdo de geometria analítica mostrando uma situação real de uma fabricante e no desenrolar do aprendizado criei situações e soluções necessárias para o bom funcionamento de sua fábrica. Através dessas situações e soluções procurei ensinar os conhecimentos de geometria analítica de uma maneira bem clara e simples.

É importante que o aluno saiba que sempre existirá um modelo matemático que irá ajudá-lo na solução de problemas em sua vida profissional e social.

Espero que esta obra contribua de alguma forma no aprendizado dos nossos alunos e também no trabalho do professor em sala de aula.

Sugestões e críticas que visem aprimorar esta obra serão sempre bem-vindas.

Sergio Lopes Rodrigues

.



Determinação de uma reta

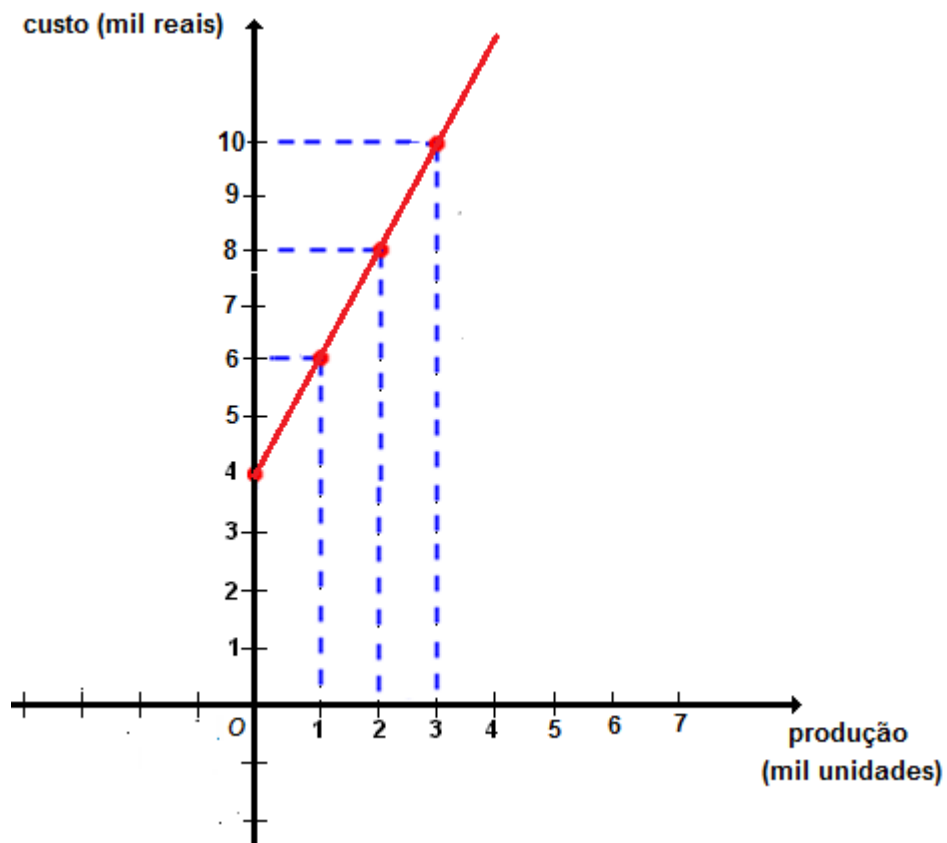
O empresário resolveu fazer o gráfico do custo (despesa) mensal da fábrica **1**.

Primeiramente transferiu seus dados para uma tabela. Veja:

Produção (mil unidades)	Custo (mil reais)
0	4
1	6
2	8
3	10
4	12
5	14

Observe na tabela que se a produção é **zero**, o custo é 4 **mil reais**, pois a fábrica tem suas despesas fixas, como por exemplo, o aluguel. Veja que a partir daí, a cada mil unidades o custo aumenta constantemente em 2 mil reais.

Representando graficamente, temos:

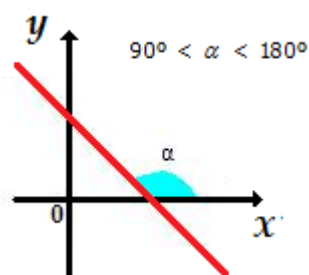
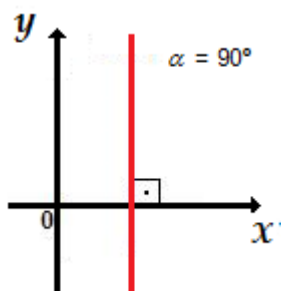
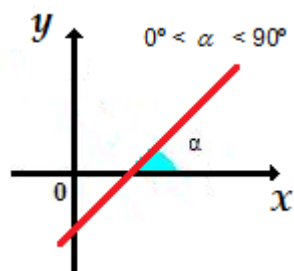
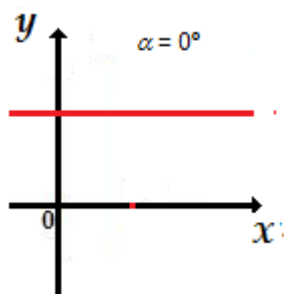


Observe que os pontos estão alinhados, portanto, pertencem a mesma reta. É evidente que os pontos deveriam estar alinhados, pois a cada mil unidades o custo aumenta constantemente em 2 mil reais.

Podemos associar a reta desse gráfico a uma **equação**. A equação é também importante para o fabricante, pois com ela, poderia saber o custo de qualquer quantidade produzida que não estivesse representada no gráfico.

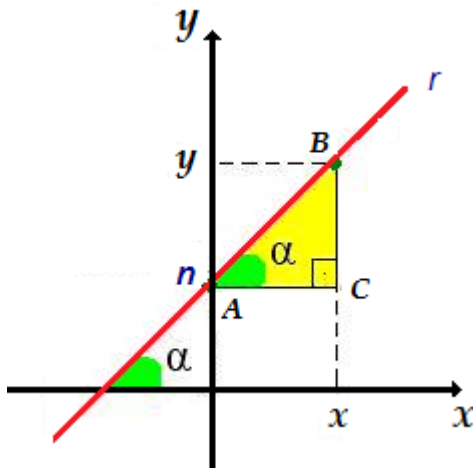
Equação da reta

Para obter a equação de uma reta devemos saber primeiramente sua direção, ou seja, sua inclinação. O **ângulo de inclinação da reta** é o **ângulo** que a reta forma com o eixo **das abscissas (eixo horizontal x)**, **no sentido anti-horário**, **partindo** de um ponto do **eixo x**. De maneira geral, representamos este ângulo por α , sendo $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$.



Através da **tangente** do **ângulo α** , que chamamos de **coeficiente angular ou declividade da reta**, podemos obter a equação da reta. Veja:

Suponhamos que uma reta qualquer r , que passa por um ponto $B(x, y)$ e forma com o eixo das abscissas um ângulo α , corte o **eixo das ordenadas (eixo vertical y)** no ponto $A(0, n)$, conforme figura:



Utilizando razões trigonométricas no triângulo retângulo ABC, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{BC}{AC} = \frac{y - n}{x}$$

Fazendo $\operatorname{tg} \alpha = m$, temos:

$$m = \frac{y - n}{x} \quad \Rightarrow \quad mx = y - n$$

$$y = mx + n$$

Esta expressão é chamada de equação da reta na sua forma reduzida, ou simplesmente **equação reduzida da reta**.

Assim a **equação reduzida da reta** é dada por:

$$y = mx + n$$

Onde:

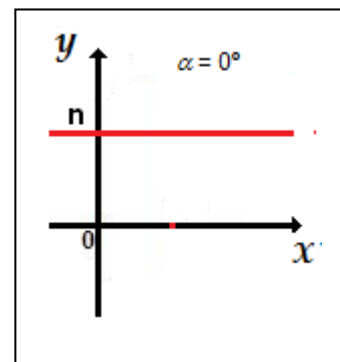
- **m** que é chamado de **coeficiente angular da reta**, representa a **tangente do ângulo de inclinação (α)** da reta.
- **n** que é chamado de **coeficiente linear da reta**, representa a ordenada do ponto onde a **reta corta o eixo das ordenadas**(eixo y).

É importante saber que quando $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ **m é positivo**,; quando $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ **m é negativo**.

Observações:

Se a reta forma um ângulo de 0° com o eixo das abscissas (reta horizontal), temos:

$$m = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow m = \operatorname{tg} 0^\circ \Rightarrow m = 0$$



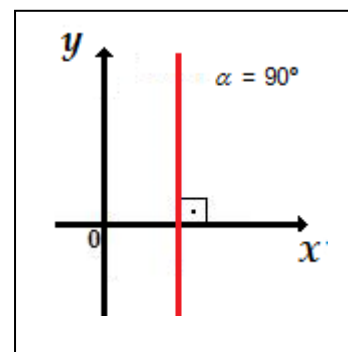
A equação reduzida da reta torna-se simplesmente em $y = n$. Veja:

$$y = mx + n \Rightarrow y = 0x + n \Rightarrow y = n$$

Se a reta forma um ângulo de 90° com o eixo das abscissas (reta vertical), temos:

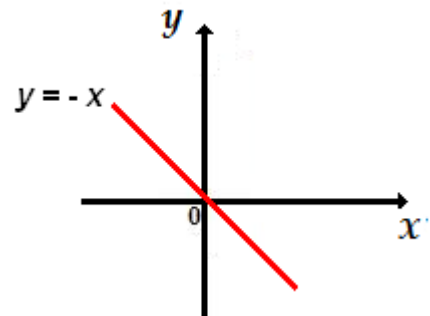
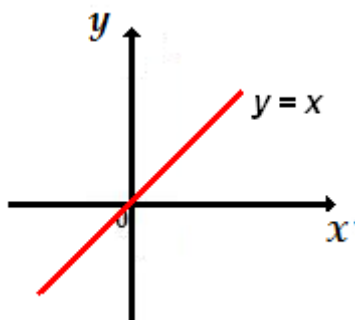
$$m = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow m = \operatorname{tg} 90^\circ \Rightarrow$$

$m = \text{não existe}$

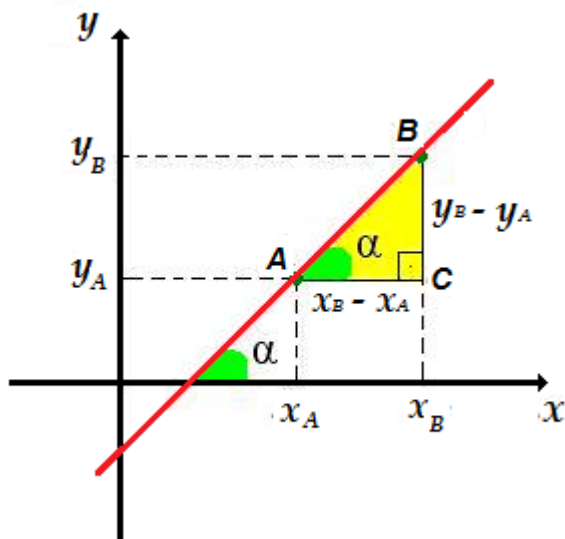


Não é possível escrever a equação reduzida de qualquer reta vertical.

É importante saber que a equação da reta **bissetriz aos quadrantes ímpares** é representada por $y = x$ e a equação da **bissetriz aos quadrantes pares** é representada por $y = -x$.



Também podemos obter o coeficiente angular de uma reta a partir das coordenadas de dois pontos quaisquer da reta. Veja:



$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

A fórmula acima generaliza o cálculo do **coeficiente angular** de uma reta não vertical, qualquer que seja sua posição no plano cartesiano. É importante observar que as diferenças entre as abscissas e entre as ordenadas, respectivamente, **devem ser obtidas em um mesmo sentido**: ambas de A para B, ou ambas de B para A.

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \quad \text{ou} \quad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Assim, podemos simplificar as expressões acima, escrevendo:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Em que Δx e Δy representam a variação de x e y respectivamente.

É importante saber, que podemos verificar se **três pontos estão alinhados**, usando o conceito de **coeficiente angular**.

Seja uma reta r de coeficiente angular **m** e três pontos **A**(x_A, y_A), **B**(x_B, y_B) e **C**(x_C, y_C). Os pontos A, B e C **estão alinhados**, ou seja, **pertencem a mesma reta** se, e somente se $m_{AB} = m_{BC}$ ou $m_{AB} = m_{AC}$ ou $m_{BC} = m_{AC}$.

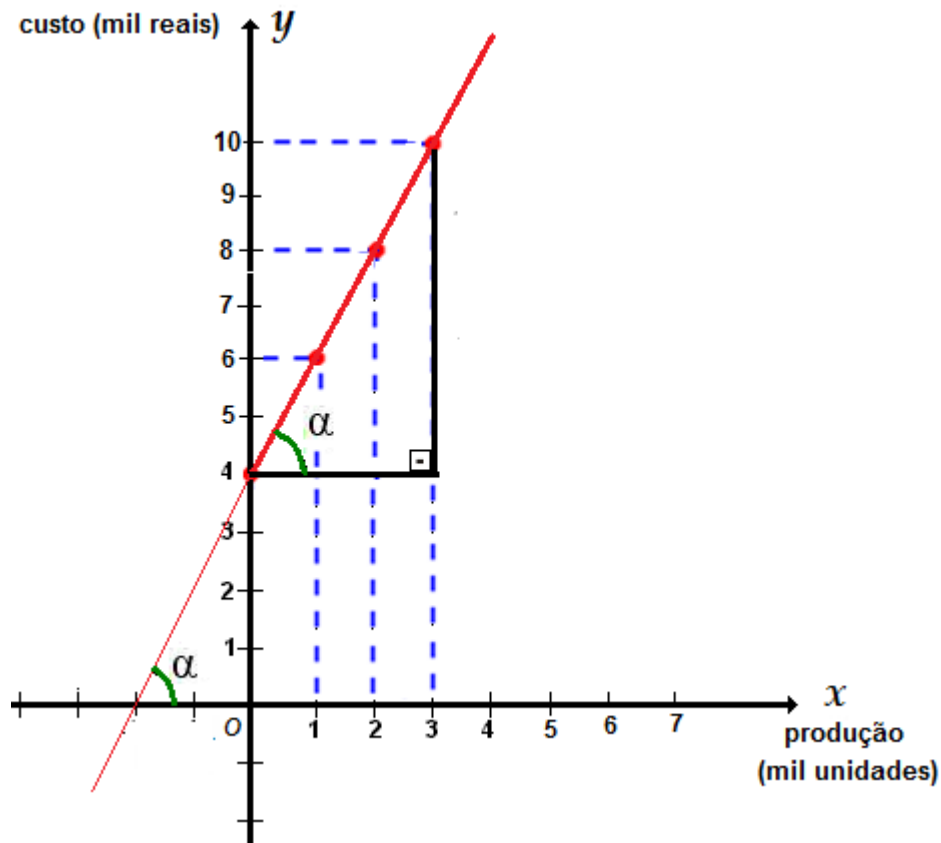
Os pontos A(1, 4), B(3, 7) e C(5, 10) estão alinhados, veja:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - 4}{3 - 1} = \frac{3}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{10 - 7}{5 - 3} = \frac{3}{2}$$

Como $m_{AB} = m_{BC}$, os pontos A, B e C estão alinhados, ou seja, pertencem a mesma reta

Agora podemos obter a **equação da reta** para o fabricante obter o **custo** de qualquer quantidade produzida que não esteja representada no gráfico.



Sabemos que a equação reduzida da reta é dada por: $y = mx + n$

Retiramos do gráfico as coordenadas de dois pontos quaisquer, como por exemplo (0,4000) e (3000,10000).

Calculando coeficiente angular **m**, temos:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{10000 - 4000}{3000 - 0} \Rightarrow m = 2$$

Observando o gráfico, podemos obter **n = 4000** (ordenada do ponto onde a **reta corta** eixo y).

Substituindo $m = 2$ e $n = 4000$ na fórmula $y = mx + n$, temos: $y = 2x + 4000$.

Portanto, a equação da reta procurada é **$y = 2x + 4000$** , onde **y** representa o **custo** de produção e **x** a quantidade de produtos fabricados.

É importante saber que caso a ordenada **n** não é vista no gráfico, podemos calculá-la.

Vamos supor que **n** não tivesse aparecido no gráfico. Como $m = 2$, a equação provisória seria $y = 2x + n$. Para o cálculo de **n**, basta substituir na equação as coordenadas de qualquer ponto conhecido da reta. Utilizaremos por exemplo o ponto (1000, 6000).

Neste caso $x = 1000$ e $y = 6000$.

$$y = 2x + n$$

$$6000 = 2 \cdot 1000 + n \quad \Rightarrow \quad n = 6000 - 2\,000 \quad \Rightarrow \quad n = 4000$$

Considerações importantes

Observe que na equação $y = 2x + 4000$, o **coeficiente angular** (declividade) **2**, significa a **taxa de variação** do custo de produção a cada mil unidades produzidas, ou seja, a cada aumento de mil unidades na produção, o custo aumentava em 2 mil reais, conforme já foi observado na tabela feita pelo fabricante.

O **coeficiente linear $n = 4000$** , significa as despesas fixas do fabricante.

É importante a equação para o fabricante, pois com ela poderá a qualquer momento saber o custo de produção para qualquer valor de produtos produzidos ou vice-versa.

Vamos supor que o fabricante queira saber o custo (y) para produzir 15 000 unidades.

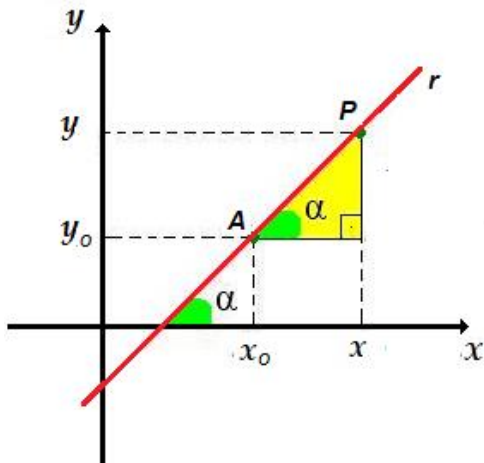
$$y = 2x + 4000 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \cdot 15000 + 4.000 \quad y = 34\,000$$

Portanto, o fabricante precisaria ter R\$ 34 000,00 para produzir 15 000 unidades.

Em contra partida, com R\$ 40 000,00, em um mês, poderia produzir 18 000 unidades.

$$40000 = 2x + 4000 \quad \Rightarrow \quad 2x = 36\,000 \quad \Rightarrow \quad x = 18\,000$$

Equação de uma reta r , conhecidos o coeficiente angular e um ponto de r .



Seja r uma reta de coeficiente angular m . Sendo $A(x_0, y_0)$, um ponto pertencente a r , e $P(x, y)$ um ponto genérico de r , distinto de A . Com base nesses dados, podemos escrever:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

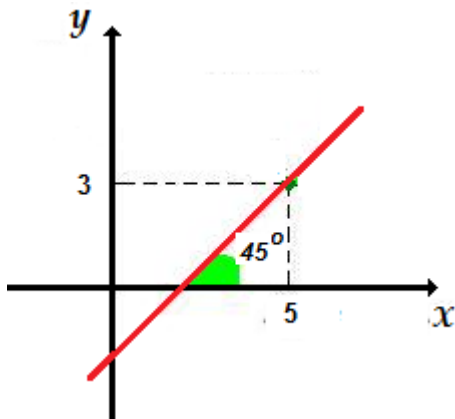
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Assim, para determinar a equação da reta não vertical que passa pelo ponto $A(x_0, y_0)$, e tem coeficiente angular m , usamos a expressão:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Veja os exemplos:

1) Determine a equação da reta abaixo.



Calculando o coeficiente angular.

$$m = \operatorname{tg} 45^\circ \Rightarrow m = 1$$

Como a reta passa pelo ponto $(5, 3)$ e $m = 1$, temos:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 1(x - 5) \Rightarrow y = x - 5 + 3$$
$$y = x - 2$$

Portanto, a equação da reta é $y = x - 2$

2) Determine a equação reduzida da reta que passa pelo ponto $(-2, 6)$ e tem declividade igual a -3 .

$$m = -3$$

Como a reta passa pelo ponto $(-2, 7)$ e $m = -3$, temos:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 7 = -3[x - (-2)] \Rightarrow$$
$$y - 7 = -3[x + 2] \Rightarrow y - 7 = -3x - 6 \Rightarrow y = -3x - 6 + 7$$
$$\Rightarrow y = -3x + 1$$

Portanto, a equação da reta é $y = -3x + 1$

3) A reta r passa pelos pontos $A(4, 2\sqrt{3})$ e $B(5, 3\sqrt{3})$, determine:

a) O coeficiente angular (declividade).

b) o ângulo de inclinação da reta.

c) A equação reduzida da reta.

d) A ordenada do ponto onde a **reta corta o eixo das ordenadas** (coeficiente linear).

$$a) m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{5 - 4} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

b) $\operatorname{tg} \alpha = m$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, então $\alpha = 60^\circ$, ou seja, o ângulo cuja tangente é $\sqrt{3}$

c) Para obter a equação da reta podemos usar qualquer um dos pontos.

Usaremos o ponto $A(4, 2\sqrt{3})$.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}(x - 4) \Rightarrow$$

$$y - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$$

d) Sabemos que equação reduzida da reta é dado por $y = mx + n$, onde n é a ordenada do ponto onde a reta corta o eixo das ordenadas (y), então na equação $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$, $n = -2\sqrt{3}$.

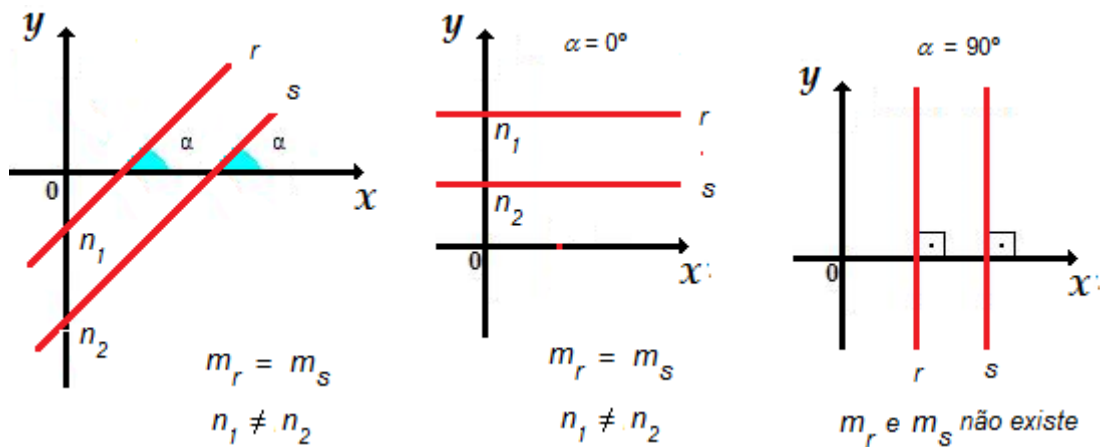
Vale lembrar que o ponto onde a reta corta o eixo y é $(0, y)$, portanto, substituído $x = 0$ na equação $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ ($y = \sqrt{3} \cdot 0 - 2\sqrt{3}$), temos

$y = -2\sqrt{3}$. Assim, as coordenadas desse ponto são $(0, -2\sqrt{3})$.

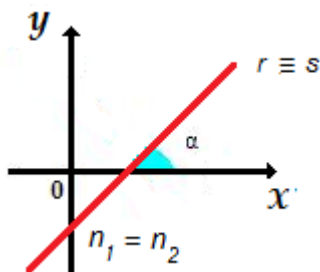
Posições relativas de duas retas

Retas paralelas

As retas r e s são **paralelas** se, e somente se, têm o **mesmo coeficiente angular** ou não existem seus coeficientes angulares.

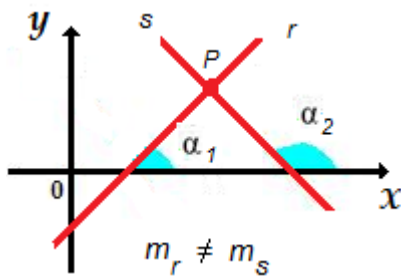


Caso as retas tenham também o mesmo **coeficiente linear**, elas serão **paralelas coincidentes**.



Retas concorrentes

As retas r e s são concorrentes se, e somente se, têm coeficientes angulares diferentes.



Vale lembrar que o ponto **P** de intersecção de duas retas concorrentes **r** e **s** pertence evidentemente, a cada uma das retas e assim, suas coordenadas devem satisfazer as equações de ambas as retas.

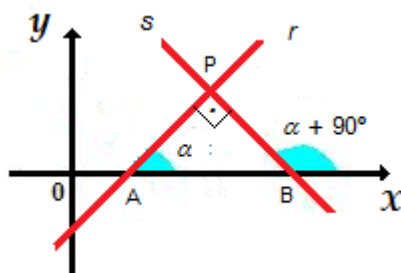
Podemos afirmar que o ponto $P(2, 7)$ é ponto de intersecção das retas

$r: y = 3x + 1$ e $s: y = 5x - 3$, pois:

$$y = 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad 7 = 3 \cdot 2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 7 = 6 + 1$$

$$y = 5x - 3 \quad \Rightarrow \quad 7 = 5 \cdot 2 - 3 \quad \Rightarrow \quad 7 = 10 - 3$$

Agora vamos considerar duas **retas concorrentes e perpendiculares** e não verticais.



Note que o ângulo de inclinação de **s** é a medida do ângulo externo relativo ao vértice B do triângulo retângulo APB, portanto, esse ângulo é a soma dos ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

Da trigonometria temos:

$$tg(90^\circ + \alpha) = \frac{\text{sen}(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\text{sen} \alpha} = -\frac{1}{tg \alpha}$$

Assim,

$$tg(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{tg \alpha}$$

Lembrete:

Para $0^\circ < \alpha < 180^\circ$,
temos:

$$\text{sen}(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\text{sen} \alpha$$

Como, $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = m_s$ e $\operatorname{tg}\alpha = m_r$, então:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \quad \text{ou} \quad m_r \cdot m_s = -1$$

Assim:

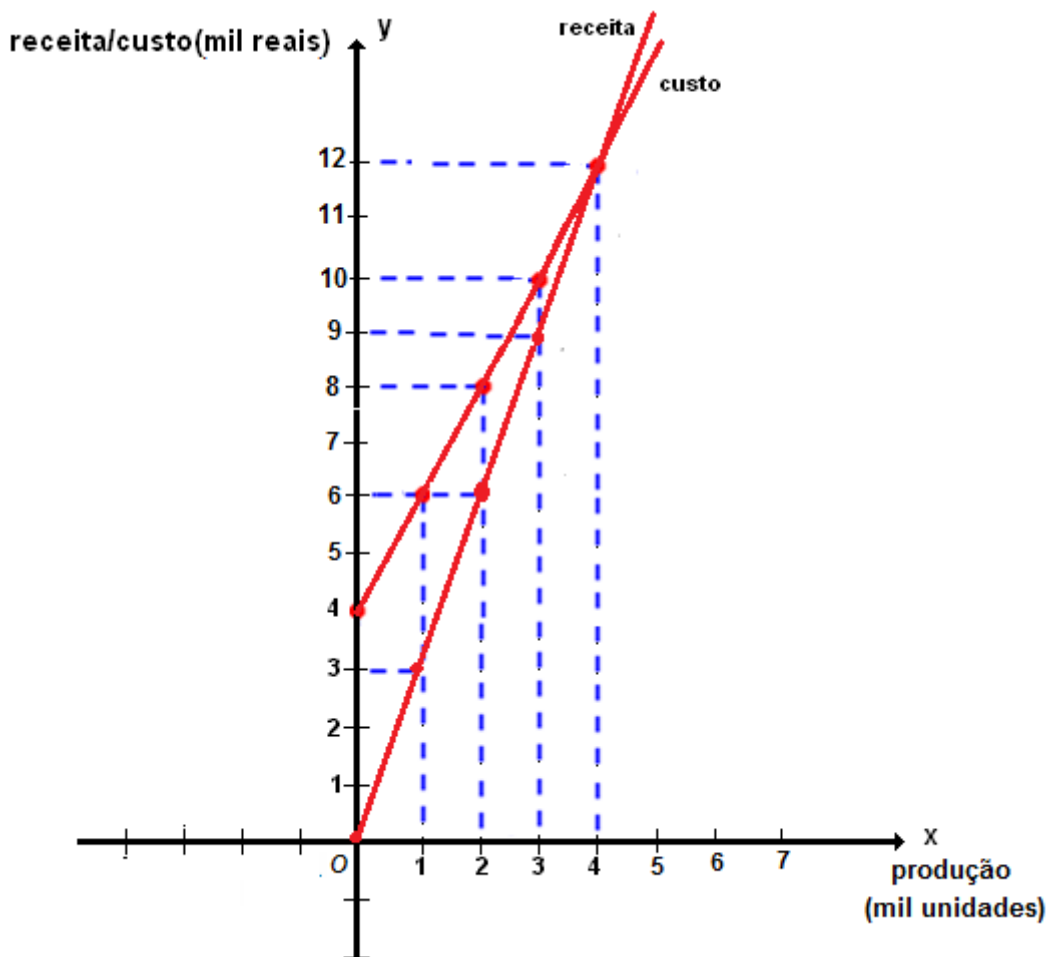
Duas retas, r e s , não verticais **são perpendiculares** se, e somente se, o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra, ou seja $m_s = -\frac{1}{m_r}$.

Interseção de retas

O fabricante resolveu transportar para uma tabela os dados de sua receita mensal em função da produção. Para competir no mercado resolveu vender seu produto por R\$ 3,00.

Produção (mil unidades)	Receita (mil reais)
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

A fim de saber a quantidade mínima que deveria produzir para não ter prejuízo, o fabricante colocou os dados da tabela no mesmo gráfico que estava representado o custo. Veja.



Note no gráfico que quando são produzidas 4 mil unidades o custo e a receita são iguais a 12 mil reais. Isso significa que se o fabricante produzir menos que 4 mil unidades ele terá prejuízo. Observando no gráfico, podemos notar que se for fabricado 3000 unidades, o fabricante terá um prejuízo de 1mil reais.

Viram a importância desse gráfico para o fabricante. Ele poderá ajudar na sua tomada de decisões.

O ponto (4000,12000) é o ponto de interseção das duas retas, isso significa que suas coordenadas devem satisfazer simultaneamente às equações dessas duas retas. **Assim, poderíamos obter também esse ponto de interseção resolvendo o sistema de equações formado pelas duas retas.**

A equação que representa o custo já foi obtida, $y = 2x + 4000$. A equação que representa o valor da receita y em função da produção x é fácil obter. Como o preço de cada produto x é 3 reais, então a equação é $y = 3x$.

Assim, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + 4000 \\ y = 3x \end{cases}$$

Nesse caso, é mais fácil resolver o sistema pelo método da substituição.

Substituindo $y = 3x$ na primeira equação, temos:

$$3x = 2x + 4000 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2x = 4000 \quad \Rightarrow \quad x = 4000$$

Substituindo $x = 4000$ na equação $y = 3x$.

$$y = 3 \cdot 4000 \quad \Rightarrow \quad y = 12000$$

Logo, as coordenadas do ponto de interseção são 4000 e 12000, ou seja, (4000, 12000).

Assim, concluímos que, para obter as coordenadas do ponto de interseção de duas retas concorrentes, basta resolver o sistema formado por suas equações.

Outros tipos de equações da reta

Equação geral da reta

Dada a equação reduzida de uma reta, para encontrar a equação geral, basta agruparmos todos os termos em um único membro da equação.

Para **equação reduzida** da reta $y = 3x + 7$, temos $3x - y + 7 = 0$

como **equação geral**.

Assim, podemos escrever a **equação geral de uma reta** na forma $ax + by + c = 0$, onde **a**, **b** e **c** são os coeficientes, sendo **a** e **b** não nulos simultâneos.

Inversamente, dada a equação geral da reta $4x + 3y - 6 = 0$, para obter a equação reduzida, basta isolarmos **y** no 1º membro da equação.

$$4x + 3y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = -4x + 6 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{6}{3}$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 2$$

Observe que tendo a equação geral $ax + by + c = 0$, $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$ veja:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

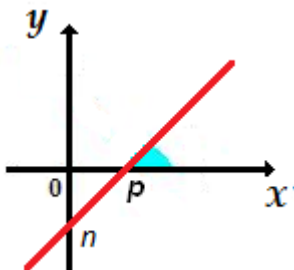
$$y = mx + n \Rightarrow m = -\frac{a}{b} \text{ e } n = -\frac{c}{b}$$

Eventualmente pode ocorrer que a equação de uma reta não esteja na sua forma mais simplificada, como exemplo a equação $2x + 6y - 8 = 0$. Notemos que os três coeficientes são pares, dividindo toda equação por 2, obtemos a equação simplificada $x + 3y - 4 = 0$. As duas equações representam a mesma reta e são denominadas **equações equivalentes**.

Uma reta pode ter várias representações de equação na forma geral, mas quando queremos obter a equação de uma reta ela deve ser a simplificada.

Equação segmentária da reta

Considerando uma reta r que intercepta o eixo y no ponto $A(0, n)$ e o eixo x no ponto $B(p, 0)$.



Calculando o coeficiente angular temos:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - n}{p - 0} \Rightarrow m = -\frac{n}{p}$$

Usando a forma reduzida $y = mx + n$, temos :

$$y = -\frac{n}{p}x + n \Rightarrow Py = -nx + pn \Rightarrow nx + py = pn$$

Dividindo os dois termos por pn , ($p \neq 0$ e $n \neq 0$), temos:

$$\frac{nx}{pn} + \frac{py}{pn} = \frac{pn}{pn} \Rightarrow \frac{nx}{pn} + \frac{py}{pn} = \frac{pn}{pn} \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{n} = 1$$

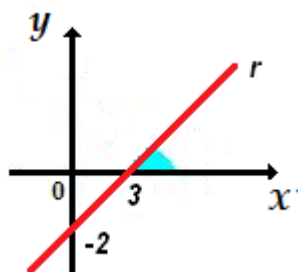
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{n} = 1$$

Esta equação é denominada **equação segmentária da reta**.

É importante observar que **p** representa a abscissa do ponto onde a **reta corta o eixo das abscissas**(eixo x).e **n** representa a ordenada do ponto onde a **reta corta o eixo das ordenadas**(eixo y).

Em certos casos é mais rápido obter a equação geral quando temos a informação de onde a reta corta os eixos. Veja no exemplo abaixo.

Determine a equação segmentária e a equação geral da reta r da figura:



Observe que a reta corta os eixos nos pontos (3,0) e (0, -2), logo, temos como **equação segmentária**:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$$

Para obtermos a **equação geral da reta** basta agruparmos todos os termos em um único membro da equação.

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{6} - \frac{3y}{6} = 1 \Rightarrow 2x - 3y = 6 \Rightarrow$$

$$2x - 3y - 6 = 0$$

Equação paramétrica da reta

As equações reduzida, geral e segmentária relacionam entre si as coordenadas **x** e **y** de um ponto genérico da reta. Em algumas situações práticas, como em física, química, economia, etc; podemos representar uma equação da reta expressando cada uma das coordenadas (**x, y**) dos pontos da reta em função de uma **terceira variável (t)**, denominada **parâmetro**.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ são **funções afins**, então essas equações representam uma reta.

Vale lembrar que o parâmetro **t** pode representar qualquer grandeza, como tempo, preço, temperatura, etc.

Veja o exemplo:

Estudando o movimento retilíneo de um projétil, um físico concluiu que seus deslocamentos, em metros, na horizontal e na vertical são descritos, respectivamente pelas equações **$x = t + 4$** e **$y = 2t + 5$** , em que **t** representa o tempo do deslocamento, em segundo. Com esses dados foi possível obter uma equação que relacione os deslocamentos, horizontal **x** e vertical **y**. Veja:

$$\begin{cases} x = t + 4 \\ y = 2t + 5 \end{cases}$$

Isolando t na equação $x = t + 4$, temos $t = x - 4$.

Substituindo t por $x - 4$ na equação $y = 2t + 5$, temos:

$$y = 2(x - 4) + 5 \Rightarrow y = 2x - 8 + 5 \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

As equações $x = t + 4$ e $y = 2t + 5$ são denominadas **equações paramétricas** associadas à equação geral $2x - y - 3 = 0$.

Voltando ao fabricante citado anteriormente.

Vimos que a equação que representava o custo de fabricação da fábrica 1 era $C = 4x + 4000$ e a equação do lucro $L = x - 4000$. Lembrando que x representava a quantidade de produtos produzidos.

Agora o fabricante deseja saber qual seria seu lucro em função do valor de seu investimento (custo) ou vice-versa.

Veja que no nosso caso o parâmetro é o x , ou seja, a quantidade de produtos.

$$\begin{cases} C = 2x + 4000 \\ L = x - 4000 \end{cases}$$

Isolando x na equação $L = x - 4000$, temos $x = L + 4000$.

Substituindo x por $L + 4000$ na equação $C = 2x + 4000$, temos:

$$C = 2(L + 4000) + 4000 \Rightarrow C = 2L + 8000 + 4000 \Rightarrow C = 2L + 12000$$

A equação que expressa o custo (C) em função do lucro (L) é:

$$C = 2L + 12000$$

Caso o fabricante quisesse saber o lucro em função do custo de fabricação a equação seria:

$$C = 2L + 12000 \Rightarrow 2L = C - 12000$$

$$L = \frac{C-12000}{2} \Rightarrow L = \frac{C}{2} - 6000$$

Vamos supor que o fabricante tivesse R\$ 100 000,00 para investir na sua fabrica **1** neste mês, quanto seria o seu lucro?

$$L = \frac{100000}{2} - 6000$$

$$L = 50000 - 6000$$

$$L = 44000$$

Portanto, seu lucro seria R\$ 44 000,00

Veja outro exemplo:

No plano cartesiano **Oxy**, um móvel em movimento retilíneo tem a sua posição em cada instante dada pelas equações:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t + 2 \end{cases}$$

Onde **t** é o tempo em segundos e as distâncias são medidas em metro.

- Qual a posição do móvel no início da contagem do tempo (**t = 0**)?
- Qual a posição do móvel quando **t = 1** ?
- Depois de quanto tempo, a partir do início, se tem **y = 10**?
- Qual a posição do móvel nesse instante?
- A que distância se encontra da posição inicial?
- Qual a equação que relaciona apenas o deslocamento x e y?
- Represente graficamente a trajetória do móvel.

Solução

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t + 2 \end{cases}$$

a) Quando $t = 0 \Rightarrow x = 2 \cdot 0 \Rightarrow x = 0$

$$y = 4 \cdot 0 + 2 \Rightarrow y = 2,$$

Portanto, no instante **0** o móvel está em A(0, 2).

b) Quando $t = 1 \Rightarrow x = 2 \cdot 1 \Rightarrow x = 2$

$$y = 4 \cdot 1 + 2 \Rightarrow y = 6$$

Portanto, após 1 segundo, a partir do início, o móvel está em C(2, 6).

c) Para $y = 10 \Rightarrow 10 = 4t + 2 \Rightarrow t = 2$.

Portanto, 2 segundos a partir do início.

d) Para $t = 2 \Rightarrow x = 2 \cdot 2 \Rightarrow x = 4$.

Portanto, depois de 2s após o início, a posição é B (4, 10).

e) A distância procurada é a distância de A(0, 2) até B(4, 10).

$$d = \sqrt{(4 - 0)^2 + (10 - 2)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Logo, a distância é $4\sqrt{5}$ m.

f)

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t + 2 \end{cases}$$

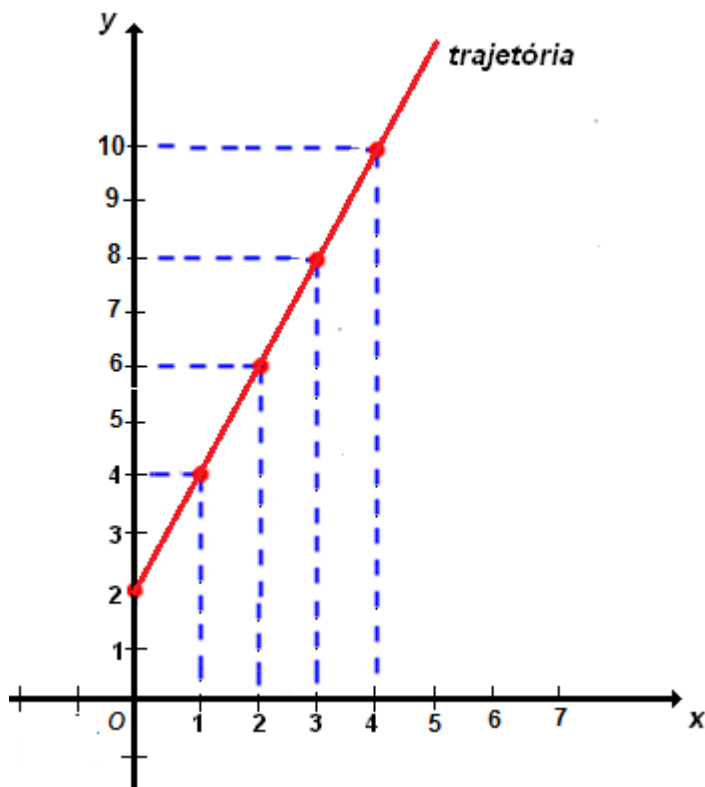
Isolando t na equação $x = 2t$, temos $t = \frac{x}{2}$.

Substituindo t por $\frac{x}{2}$ na equação $y = 4t + 2$, temos:

$$y = 4 \cdot \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow y = 2x + 2 \Rightarrow 2x - y + 2 = 0$$

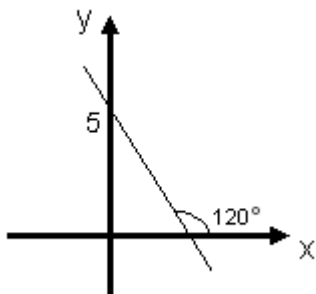
Portanto, a equação é $2x - y + 2 = 0$.

e) A representação gráfica da trajetória do móvel:



Exercícios resolvidos

1) Determine a equação reduzida da reta representada no gráfico:



Solução

$$m = \operatorname{tg} 120^\circ \Rightarrow m = -\sqrt{3}$$

$$n = 5$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = -\sqrt{3}x + 5$$

2) Determine a equação reduzida e a equação geral da reta que passa pelos pontos A(1, 6) e B(3, 10).

Solução

A equação reduzida é da forma $y = mx + n$.

O coeficiente angular (m) é o quociente entre a diferença das ordenadas e a diferença das abscissas, ou seja, $m = \frac{10-6}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$

Então a equação reduzida é $y = 2x + n$.

Como a reta passa em B(3,10), substituindo x por 3 e y por 10, temos:

$$10 = 2 \cdot 3 + n \Rightarrow n = 4$$

Esse mesmo resultado poderia ser obtido substituindo-se as coordenadas do ponto A(1,6) na equação $y = 2x + n$, pois a reta também passa em A.

Portanto, a equação reduzida é $y = 2x + 4$ e equação geral $2x - y + 4 = 0$.

3) Determine a equação da reta s que passa pelo ponto $P(4, 3)$ e é perpendicular à reta r de equação $2x - 3y + 5 = 0$

Solução

$$r: 2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow m_r = -\frac{a}{b} \Rightarrow -\frac{2}{-3} \Rightarrow m_r = \frac{2}{3}$$

Para que r seja perpendicular a s devemos ter $m_s = -\frac{1}{m_r}$

Ou seja, m_s é igual a menos o inverso de m_r .

$$\text{Então, } m_s = -\frac{3}{2}$$

Logo, como s passa pelo ponto $P(4,3)$, vamos usar a fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 4)$$

$$2y - 6 = -3x + 12 \Rightarrow 3x + 2y - 18 = 0$$

Portanto, a equação da reta s é $3x + 2y - 18 = 0$.

Bibliografia

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. São Paulo, Ática, 2014.

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva – São Paulo, Moderna, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto. Novo Olhar matemática. São Paulo, FTD, 2013.

IEZZI, Gelson. Fundamentos matemática elementar. São Paulo, Atual, 2005