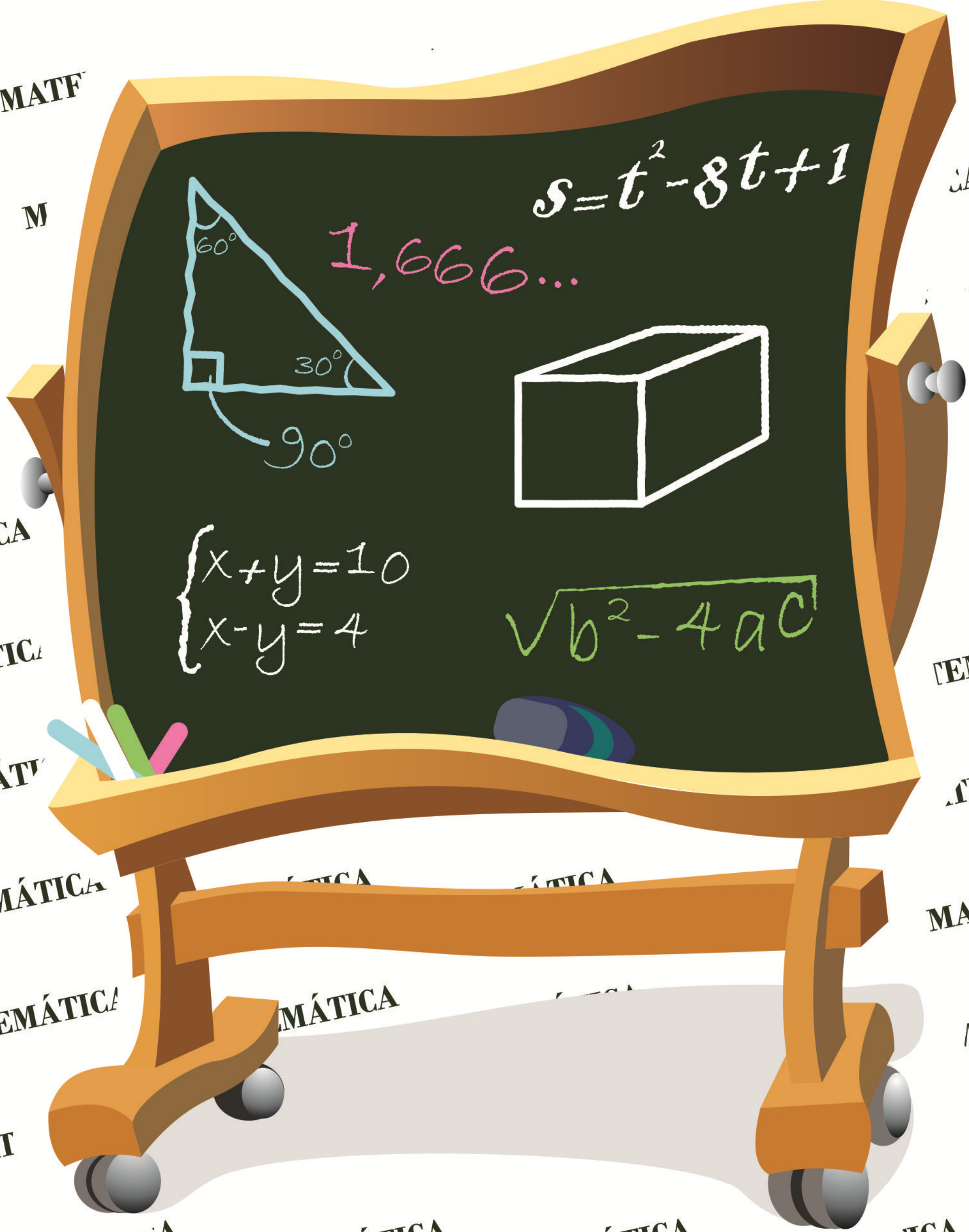
MATEMATICA



FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

ETEVM
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

GOVERNO DO Rio de Janeiro

3º ANO

Geometria analítica

Parte 1

- **Distância entre dois pontos do plano cartesiano**

- **Ponto médio**

Apresentação

Muitas vezes nossos alunos nos perguntam: Para que estou aprendendo este conteúdo? Onde vou utilizar isto?

Pensando nisso, procurei nesse trabalho desenvolver o conteúdo de geometria analítica mostrando uma situação real de uma fabricante e no desenrolar do aprendizado criei situações e soluções necessárias para o bom funcionamento de sua fabrica. Através dessas situações e soluções procurei ensinar os conhecimentos de geometria analítica de uma maneira bem clara e simples.

É importante que o aluno saiba que sempre existirá um modelo matemático que irá ajudá-lo na solução de problemas em sua vida profissional e social.

Espero que esta obra contribua de alguma forma no aprendizado dos nossos alunos e também no trabalho do professor em sala de aula.

Sugestões e críticas que visem aprimorar esta obra serão sempre bem-vindas.

Sergio Lopes Rodrigues

.

Geometria analítica

A **Geometria Analítica**, também denominada de coordenadas geométricas, se baseia na integração da **geometria** com a **álgebra**, por exemplo, permite representar figuras geométricas por meio de pares ordenados, equações ou inequações.

Os estudos iniciais estão ligados ao matemático francês René Descartes (1596 -1650), criador do sistema de coordenadas cartesianas.

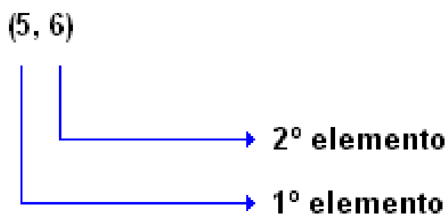
Em vários assuntos estudados anteriormente, como por exemplo, na representação gráfica de funções, aplicamos conceitos da geometria analítica. Agora estudaremos novos conceitos.

Revisando Plano Cartesiano

Pares ordenados

Dados dois elementos **x** e **y** de um conjunto. Estabelecendo entre eles uma determinada disposição (ou ordem), isto é, **x** sendo o primeiro e **y** o segundo elemento, formamos assim, o par ordenado (**x, y**).

Exemplos:



Assim, Indicamos por (x, y) o par ordenado formado pelos elementos x e y, onde x é o 1º elemento e y é o 2º elemento.

Observações

Dois pares ordenados (x, y) e (a, b) são iguais somente se $x = a$ e $y = b$

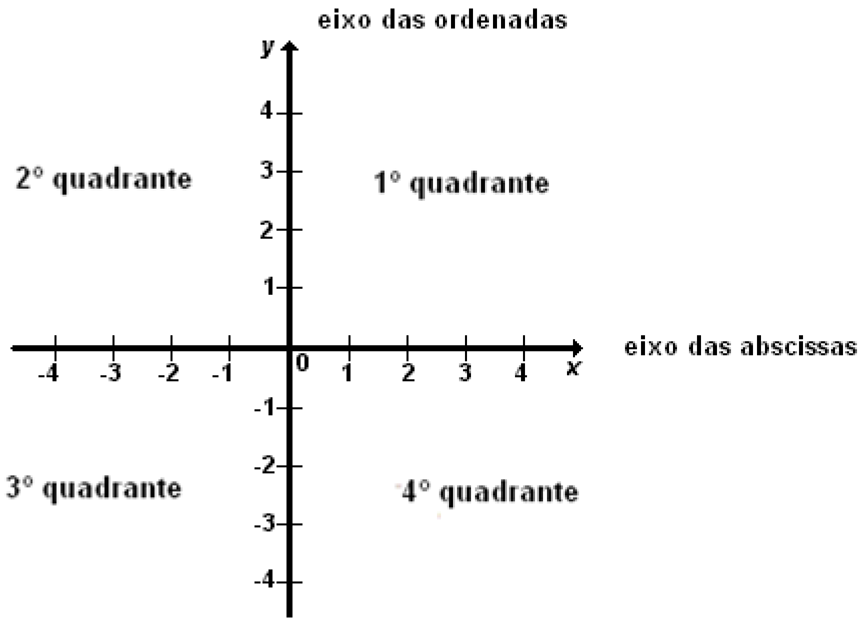
Se (7, 9) = (a,b), então a = 7 e b = 9.

Sendo x e y dois números racionais quaisquer, de um modo geral $(x, y) \neq (y, x)$.

Sendo assim, $(5, 2) \neq (2, 5)$.

Representação gráfica de um Par Ordenado

Podemos representar um par ordenado através de um ponto num plano cartesiano ortogonal, que consiste em um plano com duas retas, *x* e *y* perpendiculares entre si, que o dividem em quatro regiões, denominadas **quadrantes**. A reta horizontal (x) é chamada de **eixo das abscissas** (**eixo *x***) e a vertical (y), **eixo das ordenadas** (**eixo *y***). O ponto em que essas retas se cruzam é denominado **origem**, que corresponde ao par ordenado (**0, 0**).



Observe que os quadrantes são enumerados no sentido **anti-horário.**

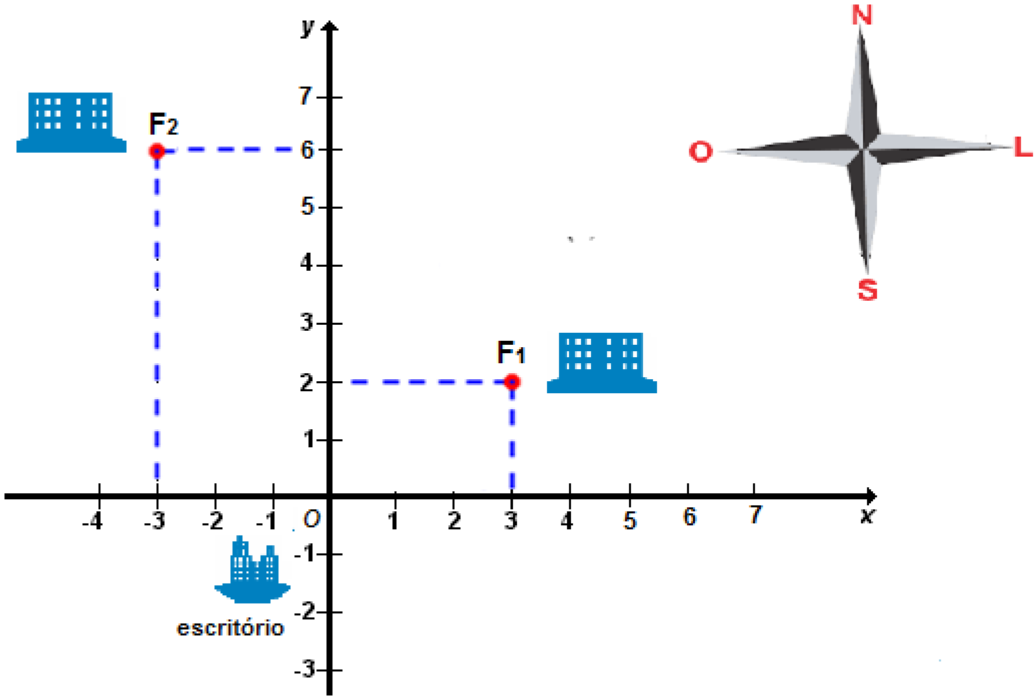
Representação de um ponto no plano cartesiano

Veja a seguinte situação:

Um fabricante de roupas resolveu construir duas fabricas em certa região. A fabrica **1** para produzir meias e a fabrica **2** para produzir vestidos e camisas. Ao mapa da região plana, onde ficava o escritório, estabeleceu um sistema cartesiano de origem O (local do escritório), adotando o quilômetro como unidade nos eixos, **eixo x** no sentido **leste- oeste** e o **eixo y** no sentido **norte-sul**. Em seguida verificou no mapa que o melhor local para construção da primeira fabrica **(F_1)** seria percorrendo do escritório, horizontalmente, 3 km em linha reta no sentido **leste**, depois, verticalmente, 2 km em linha reta no sentido **norte**, formando o ponto **F_1(3,2).**

Também verificou que o melhor local para construção da segunda fabrica seria percorrendo horizontalmente 3 km em linha reta no sentido **oeste**, depois, verticalmente, 6 km em linha reta no sentido **norte**, formando o ponto **F_2(-3,6).**

Assim, representaremos o ponto **F_1(3,2) e F_2(-3,6)** no plano cartesiano.



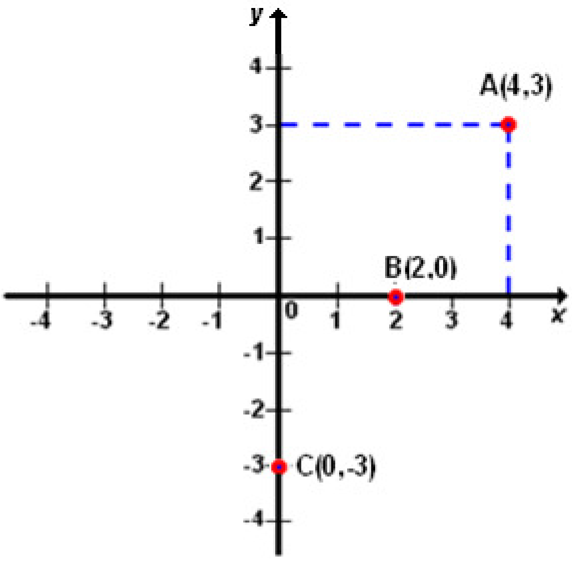
Na prática, representamos um ponto no plano cartesiano da seguinte forma:

Representar o ponto A(4,3) num plano cartesiano.

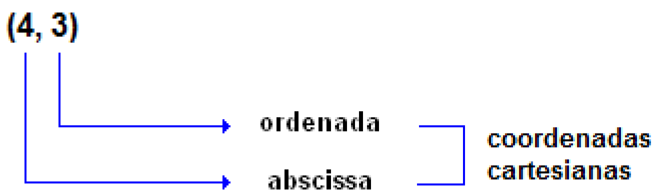
Primeiro: localizamos o ponto 4 no eixo das abscissas.
Segundo: localizamos o ponto 3 no eixo das ordenadas.
Terceiro: Traçamos as retas perpendiculares aos eixos x e y, por esses pontos, o encontro delas será o local do ponto.

Observação:

Se **y = 0**, como **B**(2, 0), o ponto encontra-se no eixo **x**. Se **x** = 0, como **C**(0, -3), o ponto encontra-se no eixo **y**. Veja como ficou representados os pontos **A**(4, 3), **B**(2, 0) e **C**(0, -3).



Dizemos que no ponto **A(4,3)** o 1º número do par ordenado **(4)** é a **abscissa** do ponto , e o 2º número **(3)**, é a **ordenada** do ponto. Os números do par ordenado ,4 e 3, são chamados **coordenadas cartesianas do ponto.**

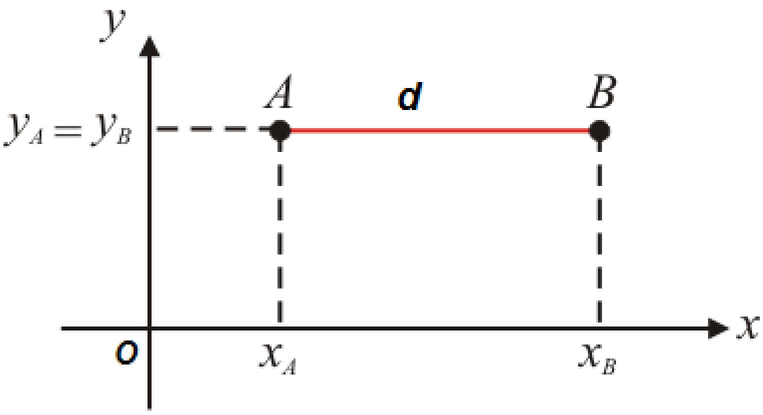


Agora iremos calcular a distância entre a fabrica 1 e 2.

Distância entre dois pontos do plano cartesiano

Dados dois pontos **A(x_A,y_A)** e **B (x_B,y_B),** obtemos a distância **d** entre **A** e **B**, traçando as projeções destes pontos sobre os eixos coordenados.

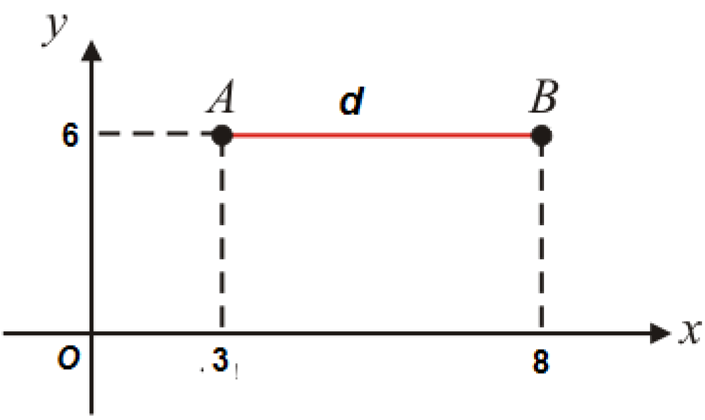
1º caso: $\overline{AB}$ paralelo ao eixo **x**.



Observe que a distância entre os pontos A e B é o valor absoluto (módulo) da diferença entre x_B e x_A.

$$d = |x_B - x_A|$$

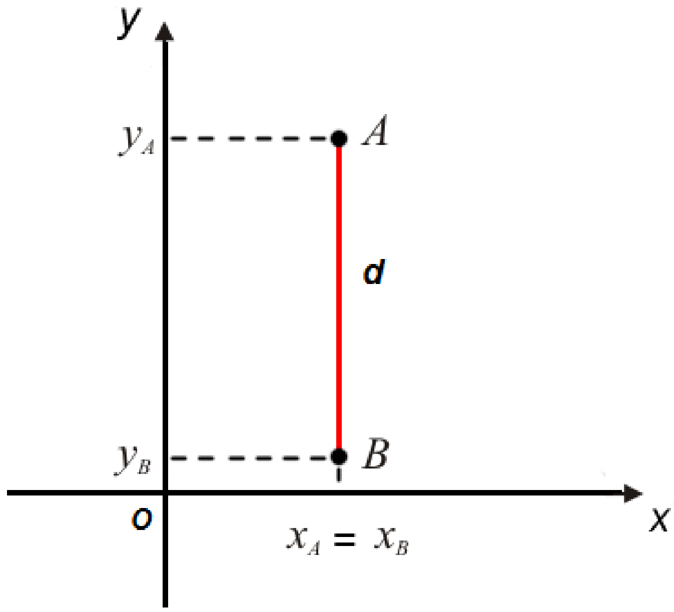
Exemplo: Determine a distância entre os pontos A(3, 6) e B(8,6)



$d = |8 - 3| = |5|$

$d = 5$

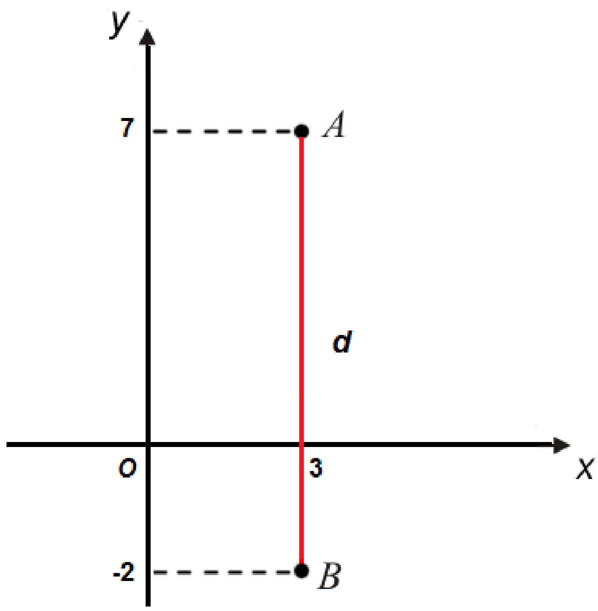
2º caso: $\overline{AB}$ paralelo ao eixo **y**.



Observe que a distância entre os pontos A e B é o valor absoluto (módulo) da diferença entre y_B e y_A.

$$d = |y_B - y_A|$$

Exemplo: Determine a distância entre os pontos A(3, 7) e B(3,-2)



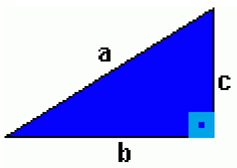
$d = |-2 - 7| = |-9|$

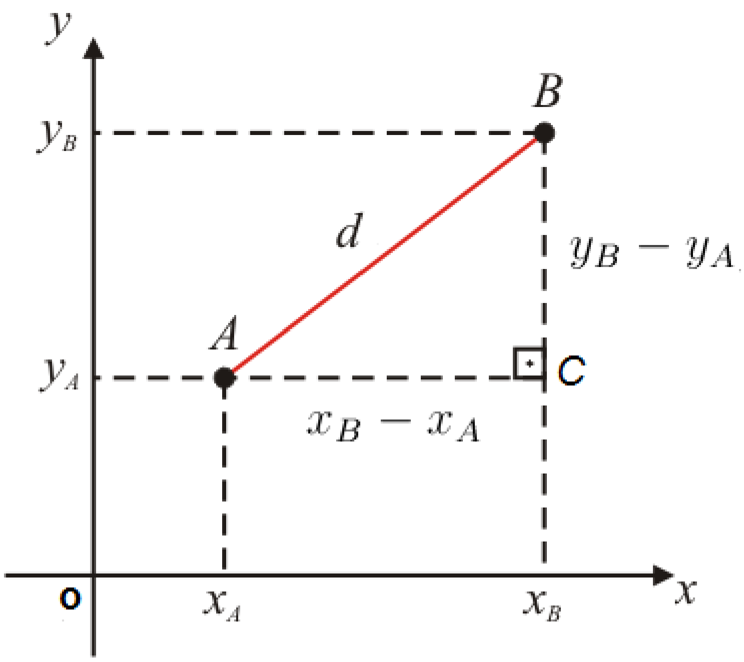
$d = 9$

3º caso: $\overline{AB}$ **não** é paralelo ao eixo **x** ou ao eixo **y**.

Primeiramente iremos revisar o **Teorema de Pitágoras**.

Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa **a** é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos **b** e **c**, isto é, $a^2 = b^2 + c^2$.





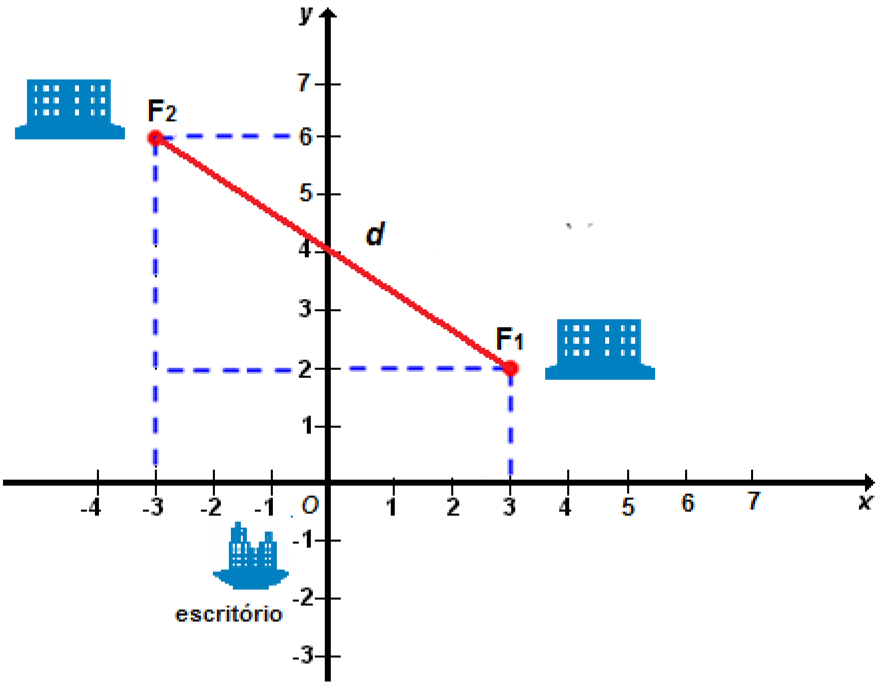
Observe que a distância ***d*** entre A e B é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Assim:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Calculando a distância entre as fábricas 1 e 2, ou seja, a distância entre $F_1(3,2)$ e $F_2(-3,6)$.



$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

$$d = \sqrt{(3-(-3))^2 + (2 - 6)^2}$$

$$d = \sqrt{(3+3)^2 + (-4)^2}$$

$$d = \sqrt{(6)^2 + (-4)^2}$$

$$d = \sqrt{36+16}$$

$$d = \sqrt{52}$$

$d = 2\sqrt{13}$ km ou 7,2 km

Veja outro exemplo:

1) Calcule a distância entre os pontos A(-2, 6) e B(1, 10).

Solução:

d = $\sqrt{(1-(-2))^2 + (10-6)^2}$

d = $\sqrt{3^2 + 4^2}$

d = $\sqrt{9+16}$

d = $\sqrt{25}$

d = 5

2) Verifique se o triângulo de vértice A(-2,4), B(-5,1) e C(-6,5) é eqüilátero, isósceles ou escaleno.

Lembrete: O triângulo eqüilátero tem os três lados com medidas iguais, o triângulo isósceles tem dois lados com medidas iguais e o triângulo escaleno tem os três lados com medidas diferentes.

Solução:

Calculamos as medidas dos lados do triângulo ABC:

$d_{AB} = \sqrt{(-5+2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$d_{AC} = \sqrt{(-6+2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$d_{BC} = \sqrt{(-6+5)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

Como $d_{AC} = d_{BC}$, então o triângulo ABC é isósceles.

Ponto médio de um segmento

Num certo dia o fabricante resolveu abrir uma loja para vender suas roupas no varejo. Ele desejava que a loja ficasse equidistante às fabricas, de maneira que essa distância fosse a menor possível, ou seja a loja deveria fica na metade da distância entre F_1 e F_2.

Assim, devemos calcular o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.

Antes de calcular, vamos achar a fórmula para cálculo do ponto médio de um segmento.

Seja M o ponto médio de um segmento $\overline{AB}$.

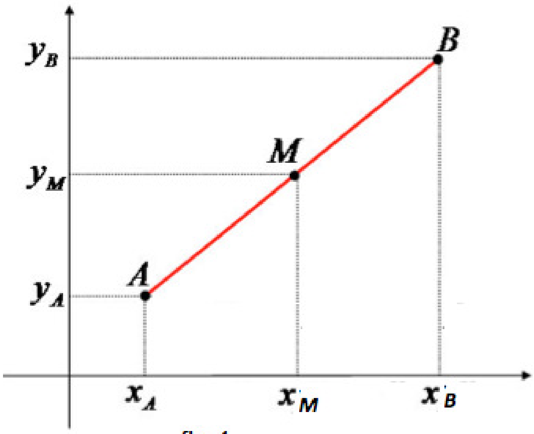


fig. 1

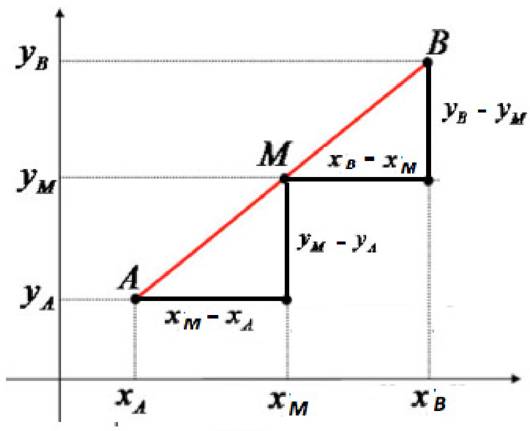


fig. 2

Notemos na **figura 2** que os triângulos retângulos são semelhança, pois possuem seus ângulos correspondentes congruentes, Assim:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} = \frac{y_M - y_A}{y_B - y_M}$$

Como $AM = MB$, pois M é o ponto médio de $\overline{AB}$, então:

$$1 = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} = \frac{y_M - y_A}{y_B - y_M}$$

Cálculo de $\boldsymbol{x_M}$.

$$\frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} = 1$$

$$x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$2x_M = x_A + x_B$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Cálculo de $\boldsymbol{y_M}$.

$$\frac{y_M - y}{y_B - y_M} = 1$$

$$y_M - y_A = y_B - y_M$$

$$2y_M = y_A + y_B$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Observe que as coordenadas do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ correspondem à média aritmética das correspondentes coordenadas do ponto A e B.

Agora vamos calcular o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.

F_1(3,2) e F_2(-3,6)

$$x_M = \frac{3+(-3)}{2} = \frac{3-3)}{2} \quad => \quad x_M = \frac{0}{2}$$

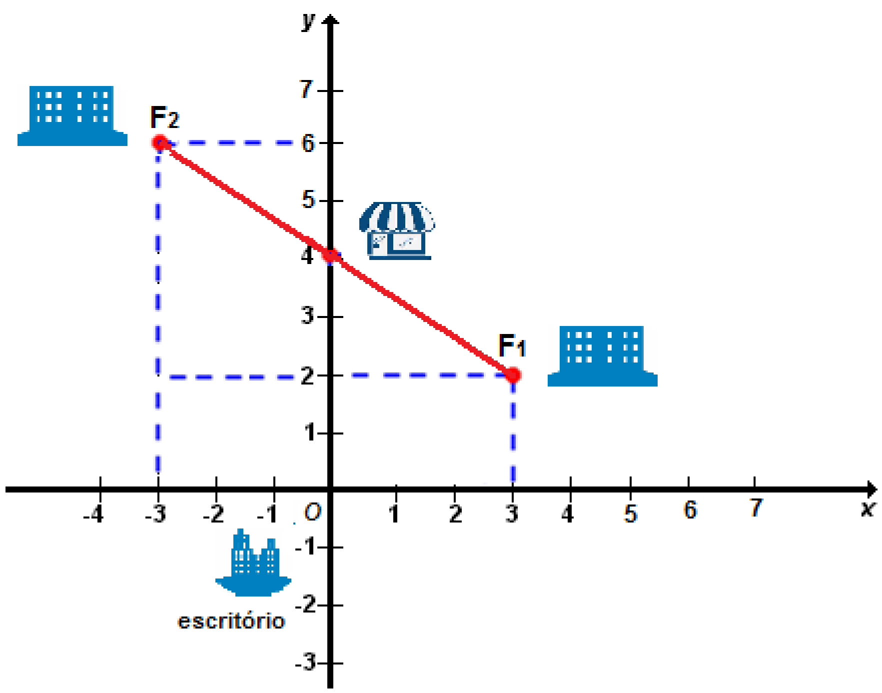
$$x_M = 0$$

$$y_M = \frac{2+6}{2} \quad => \quad y_M = \frac{8}{2}$$

$$y_M = 4$$

Portanto, o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$ é M(0,4).

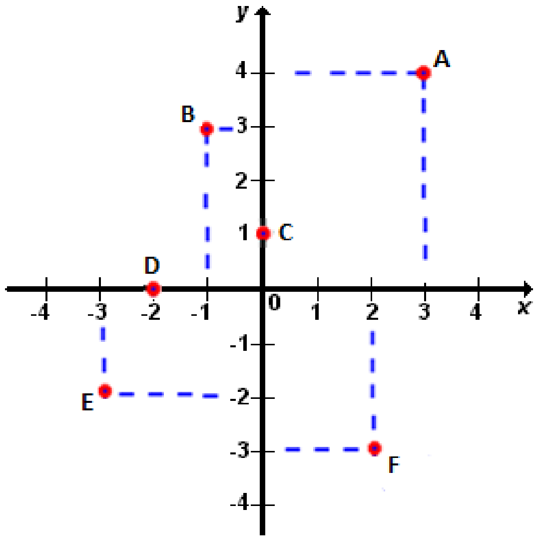
Assim, a loja deveria ficar no ponto M(0,4) no mapa, ou seja, 4 km ao norte do escritório.



Exercícios

1) Observe a gráfico e determine as coordenadas dos pontos:

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E
f) F



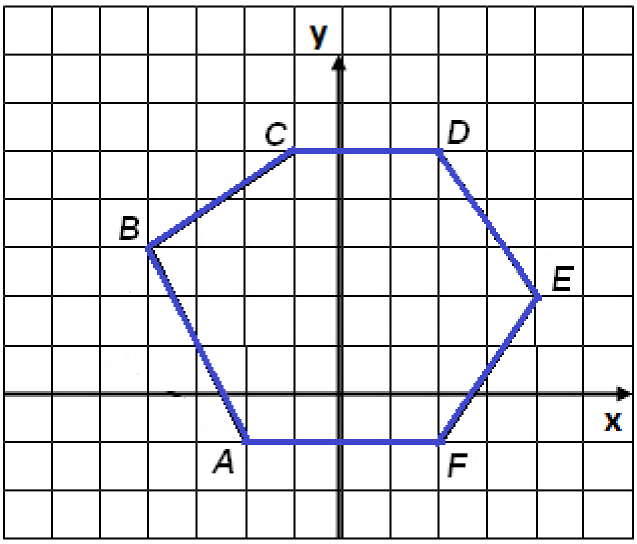
2) Marque no plano cartesiano acima os seguintes pontos:

a) G(1,-2) b) H(0, 3) c) I(3, -2)

d) J(-3, 3) e) L(-1, -4) f) M(0, -4)

g) C(4, 4) h) M (-4, 0) i) R(3, 0)

3) Dê as coordenadas dos vértices do polígono mostrado no gráfico a seguir:



4) Calcule a distância entre os pontos:

a) A (3, -1) e B (3, 5).

b) A (3, 7) e B (1, 4).

5) Classifique cada triângulo ABC como eqüilátero, isósceles ou escaleno.

a) A(3, 1) , B(1, 6) C(2, 3)

b) A(-2, 0) , B(2, 0) C(0, $2\sqrt{3}$)

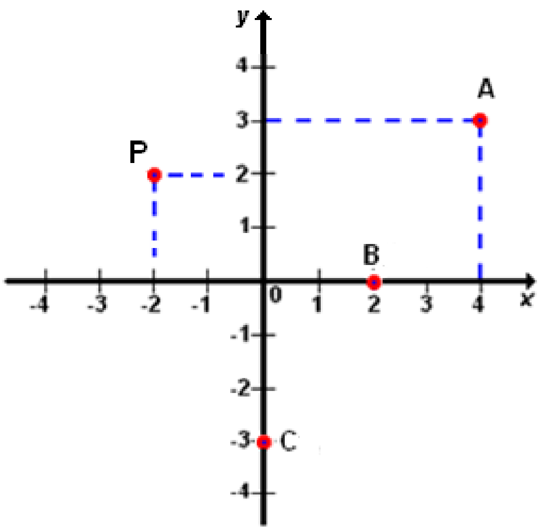
6) Verifique se o triângulo de vértice A(4,-2), B(2, 3) e C(6, 6) é retângulo, acutângulo ou obtusângulo.

Considerando um triângulo com lados que medem **a**, **b**, **c**, sendo **a** a medida do maior lado. Lembre-se de que:

$a^2 = b^2 + c^2$ <=> triângulo retângulo
$a^2 > b^2 + c^2$ <=> triângulo obtusângulo
$a^2 < b^2 + c^2$ <=> triângulo acutângulo

7) Determine as coordenadas do centro da circunferência que passa pelos pontos A(0,5), B(3,6)e C (8,1).

8) À planta baixa de um condomínio de apartamentos foi associado um sistema cartesiano de coordenadas, conforme figura.



O ponto P representa o local onde sai o sinal de internet e os pontos A, B e C representa a localização de algumas áreas de lazer. Sabendo que o raio de alcance do sinal de internet é de 59 m e que cada unidade representada na planta corresponde 10 m, em quais os pontos os moradores poderão acessar a internet?

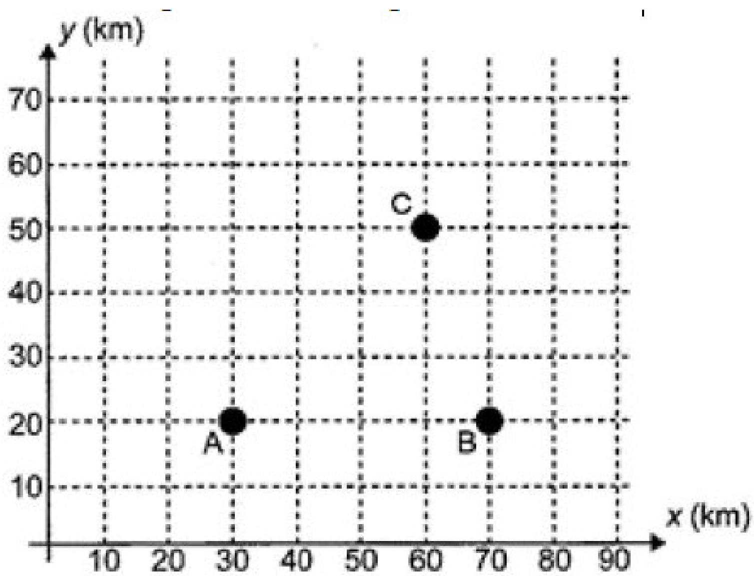
9) Para estudar o movimento de um astro que se desloca com velocidade constante em trajetória retilínea, um astrônomo fixou um plano cartesiano, contendo essa trajetória, e adotou nos eixos coordenados uma unidade conveniente para grandes distâncias. Em certo momento, o cientista observou que o astro estava no ponto A(3, 6) e quatro minutos depois estava no ponto B(5,8).

a) Qual era a posição do astro, dois minutos após a passagem pelo ponto A?

b) Qual era a posição do astro, um minuto após a passagem pelo ponto A?

10-(ENEM) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das

antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65; 35) b) (53; 30) c) (45; 35) d) (50; 20) c) (50; 30)

11- (UPM-SP) Em relação a um sistema cartesiano ortogonal, com os eixos graduados em quilômetros, uma lancha sai do ponto (–6,–4), navega 7 km para leste, 6 km para o norte e 3 km para oeste, encontrando um porto. Depois continua a navegação, indo 3 km para norte e 4 km para leste, encontrando um outro porto. A distância, em quilômetros, entre os portos é:

a) 7 b) $3\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $\sqrt{7}$ e) 5

Bibliografia

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. São Paulo, Ática, 2014.

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva – São Paulo, Moderna, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto. Novo Olhar matemática. São Paulo, FTD, 2013.

IEZZI, Gelson. Fundamentos matemática elementar. São Paulo, Atual, 2005