PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Eduardo é um pequeno investidor. Aplicou no início do mês R$ 9000,00 em um determinado fundo de investimento, cujo rendimento é de 2% ao mês. Quanto Eduardo terá no início do 4° mês de investimento?

Solução:

Queremos determinar o total que Eduardo terá no início do 4° mês de investimento, isto é, o montante que corresponde ao capital aplicado **(R$ 9000,00)** mais o juro apurado de três meses de aplicação.

No início **do 1° mês**, Eduardo possui R$ 9000,00.

No início do 2° mês, terá 9000,00 + 2% de 9000,00, ou seja, 102% de 9000,00 = 9000,00 **. 1,02 = R$ 9180,00.** (1º mês de aplicação)

No início do 3° mês, 9180 + 2% de 9180,00 = 102% de 9180,00 = 9180,00 **.** 1,02 = **R$ 9363,60,** ou seja, 9000,00 **.** 1,02 **.** 1,02 = **9000,00 . $(1,02)^2$** = **R$ 9363,60.** (2º mês de aplicação)

No início do 4° mês, 9363,60 + 2% de 9363,60 = 102% de 9363,60 = 9363,60 **.** 1,02 = R**$ 9550,87.** ou seja, 9000,00 **.** 1,02 **.** 1,02 **.** 102 = **9000,00 . $(1,02)^3$** = **R$ 9550,87.** (3º mês de aplicação)

Notamos que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido por meio da **multiplicação** do termo anterior por uma **constante**, que no caso é 1,02.

Sequência desse tipo são chamadas de Progressões Geométricas.

Definição

Denomina-se **progressão geométrica (PG)** a sequência em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se uma constante **q**(diferente de zero) pelo termo anterior. Essa constante **q** chama-se **razão da progressão geométrica.**

Exemplos:

(1, 3, 9, 18, 54) é uma progressão geométrica finita de razão 3.

(4, -8, 16, -32, 64, -128, ...) é uma progressão geométrica infinita de razão -2.

(200, 100, 50, 25) é uma progressão geométrica finita de razão $\frac{1}{2}$**.**

Observe que, para obtemos a razão da PG, basta escolher qualquer número da sequência, e dividir pelo número anterior.

Classificação das progressões geométricas

Dependendo da razão **q,** uma PA pode ser:

Constante: se todos os termos são iguais. Neste caso sua **razão** é igual a **1**.

(7, 7, 7 ...), **r = 1**

Crescente: quando cada termo, a partir do segundo, é **maior** que o seu anterior. Isso ocorre quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

(10, 30, 90, 270, ...) q = 3

(-4, -,2, -1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$ ...), $q = \frac{1}{2}$

Decrescente: quando cada termo, a partir do segundo, é **menor** que o seu anterior. Isso ocorre quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.

(9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...), $q = \frac{1}{3}$,

(-2, -4, -8, -16, ...), q = 2

Oscilante: Neste caso, a razão é negativa, o que fará com que a sequência numérica seja composta de números negativos e positivos, se intercalando.

(5, -10, 20, -40, 80, - 160,...), q = - 2

Fórmula do termo geral de uma PG

Podemos verificar na sequência (9000, 9180, 9363,60, 9550,87) do exemplo inicial que:

$a_1 = 9000$

$a_2 = 9000 . 1,02 =$ R$ 9180,00.

$a_3 = 9000 . (1,02)^2 =$ R$ 9363,60

$a_4 = 9000 . (1,02)^3 =$ R$ 9550,87.

Se quisermos calcular o valor corrigido no início de qualquer mês poderíamos utilizar a seguinte fórmula:

$a_n = 9000 . (1,02)^{n-1}$

Portanto, partindo-se do primeiro termo, a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica é:

$$\boxed{a_n = a_1 . q^{n-1}}$$

Comprei um TV e vou **pagá-la em seis prestações** crescentes, de modo que a primeira prestação seja de 20 reais e cada uma das seguintes seja o dobro da anterior. Qual é o **preço da quarta** e **última** prestação.

$a_n = a_1 . q^{n-1}$

Lembrete: **a_1** é o primeiro termo, **q** é a razão, **n** é o número de termos desejado e a_n é o termo desejado.

Preço da quarta prestação

$a_1 = 20$, $q = 2$ e $n = 4$

$a_4 = 20 . (2)^{4-1}$ => $a_4 = 20 . (2)^3$ => $a_4 = 20 . 8$ => $a_4 = 160$

Preço da última prestação

$a_1 = 20$, $q = 2$ e $n = 6$

$a_6 = 20 \,.\, (2)^{6-1}$ => $a_6 = 20 \,.\, (2\,)^5$ => $a_6 = 20 \,.\, 32$ => $a_6 = 640$

Portanto, o preço da quarta e última prestação será R$ 160,00 e R$ 640,00 respectivamente.

Soma dos termos de uma PG.

Observe a seguinte situação:

Seu Joaquim, dono de uma loja, precisa de vendedores temporários para trabalhar os dez últimos dias que antecedem o natal. Ele oferece R$ 2,00 pelo primeiro dia de trabalho e, para os dias seguintes, o dobro do que eles recebem no dia anterior. Apareceram seis candidatos, mas somente um, bom em matemática, aceitou o emprego, o restante acharam o português um tremendo pão duro. Quanto ele receberá pelos dez dias de trabalho?

No 1º dia receberá R$ 2,00.

No 2º dia receberá R$ 4,00.

No 3º dia receberá R$ 8,00.

No 4º dia receberá R$ 16,00.

No 5º dia receberá R$ 32,00.

No 6º dia receberá R$ 64,00.

No 7º dia receberá R$ 128,00.

No 8º dia receberá R$ 256,00.

No 9º dia receberá R$ 512,00.

No 10º dia receberá R$ 1024,00.

Valor total recebido: 2 + 4 + 8 + 16 + 32 +64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 2046

Portanto, ele receberá R$ 2046,00 para trabalhar 10 dias.

Observe que o valor recebido em cada dia forma uma PG de razão 2 e o total recebido é a soma dos termos da PG.

Existem casos em que é muito trabalhoso obter a soma dos termos de uma PG adicionando termo a termo. Nesses casos usamos a seguinte fórmula demonstrada abaixo:

Podemos expressar a soma dos **n** termos de uma PG finita como:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ que podemos também representar assim:

$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}$ **(I)**

Multiplicando-a os dois membros pela razão **q** temos:

$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$ **(II)**

Subtraindo as duas igualdades (I) e (II), temos:

$$
\begin{array}{rl}
S_n = & a_1 + \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{a_1 \cdot q^2} + \cancel{a_1 \cdot q^3} + \ldots + \cancel{a_1 \cdot q^{n-2}} + \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}} \\
- \quad S_n \cdot q = & \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{a_1 \cdot q^2} + \cancel{a_1 \cdot q^3} + \ldots + \cancel{a_1 \cdot q^{n-2}} + \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}} + a_1 \cdot q^n \\
\hline
S_n - S_n \cdot q = & a_1 - a_1 \cdot q^n
\end{array}
$$

Colocando S_n e a_1 em evidência, temos:

$S_n (1 - q) = a_1 (1 - q^n)$, logo:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}}$$

Observe, se fizéssemos (II) – (I),

$S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$

$S_n (q - 1) = a_1 (q^n - 1)$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}}$$

Portanto, podemos utilizar as fórmulas acima para calcularmos a soma de todos os termos de uma P.G. finita, desde que q ≠ 1.

Utilizando a fómula no nosso exemplo, temos:

$a_1 = 2$, $q = 2$ e $n = 10$

$$S_n = \frac{2\,(2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$$S_n = \frac{2\,(1024 - 1)}{1}$$

$S_n =$ $2 \,.\, 1023 = 2046$

Observação:

Caso tenhamos o valor de $\mathbf{a_n}$**,** a fórmula pode ser representada por:

$$\mathbf{S_n} = \frac{\mathbf{a_1\,(q^n - 1)}}{\boldsymbol{q - 1}} = \frac{\mathbf{a_1\,.\,q^n - a_1}}{\boldsymbol{q - 1}} = \frac{\mathbf{a_1\,.\,q^{n-1}.q - a_1}}{\boldsymbol{q - 1}} =$$

$$\mathbf{S_n} = \frac{\mathbf{a_n\,.q - a_1}}{\boldsymbol{q - 1}}$$

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG INFINITA

Considere a seguinte situação:

Um Fazendeiro possui 1 tonelada de farinha e resolveu doar para pessoas carentes, a cada mês, a metade da quantidade de farinha que ele tiver. Assim, no primeiro mês doará a metade da quantidade. No segundo mês, a metade da metade que sobrou do mês anterior. No terceiro mês, doará a metade da quantidade do mês anterior, e assim por diante. Assim, a quantidade de farinha doada formam uma PG infinita e decrescente de razão $\frac{1}{2}$ **.**

$$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$$

Observe abaixo que, a cada mês que passa, o total de farinha doada aumenta e se aproxima de 1 tonelada.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ = 0,875

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ = 0,9375

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ = $\frac{31}{32}$ =0,9687

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ = $\frac{63}{64}$ = 0,9844

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ = $\frac{127}{128}$ = 0,99218

Por isso, dizemos que 1 tonelada é o limite dessa soma.

Podemos observar que só há um limite quando **-1< q < 1**. Porque se

q <–1 ou q > 1, a soma tende a menos infinito $(-\infty)$ ou mais infinito $(+\infty)$**.** Neste caso é impossível calcular a soma dos termos da PG.

Caso o fazendeiro conseguisse dividir a quantidade de farinha sempre, a soma de todas essas quantidades seria igual a quantidade total da farinha, ou seja, 1 tonelada. Considerando n, o enésimo mês, isso ocorreria quando **n** tendesse ao ∞**.**

Agora vamos calcular alguns valores para potência $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

n = 1 => $\left(\frac{1}{2}\right)^1$.= $\left(\frac{1}{2}\right)$ = 0,5

n = 2 => $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.= $\left(\frac{1}{4}\right)$ = 0,25

n = 3 => $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.= $\left(\frac{1}{8}\right)$ = 0,125

n = 4 => $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.= $\left(\frac{1}{16}\right)$ = 0,0625

n = 5 => $\left(\frac{1}{2}\right)^5 .= \left(\frac{1}{32}\right)$ = 0,03125

... => **...**

n = 10 => $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} .= \left(\frac{1}{1024}\right)$ = 0,0009765625

Notamos que para **n** suficiente grande, o valor de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende a se aproximar de zero. Dizemos, então, que o limite de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ quando **n** tende ao **infinito** é **zero**. Representamos isso da seguinte maneira:

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ = 0 (lê-se limite de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ quando n tende a infinito é igual a zero).

Com essas observações, podemos definir uma fórmula para calcular a soma dos infinitos termos de uma PG a partir da soma dos **n** primeiros termos de uma PG.

$S_n = \frac{a_1\,(1 - q^n)}{1-q}$ **,** quando n → + ∞ (n tende a infinito) e **-1 < q < 1** temos:

$\lim_{n\to\infty} (q)^n$ = 0. Assim $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1\,(1-0)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$

Assim a soma dos infinitos termos de uma PG (para -1 < q < 1)

é dada por

$$\boxed{\mathbf{S_n = \frac{a_1}{1-q}}}$$

Usando a fórmula para calcular a soma PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$ do nosso exemplo, temos:

$a_1 = \frac{1}{2}$

$q = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

PRODUTO DOS TERMOS DE UMA P.G. FINITA

Podemos expressar o produto dos **n** termos de uma PG finita como:

$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ que podemos também representar assim:

$$\mathbf{P = a_1 \cdot a_1 . q \cdot a_1 . q^2 \cdot a_1 . q^3 \cdot \ldots \cdot a_1 . q^{n-1}}$$

$$P = \underbrace{a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_1}_{\text{nfatores}} \cdot (q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \ldots \cdot q^{n-1})$$

Logo:

$\mathbf{P = a_1^n . q^{1+2+3+4+\ldots+n-1}}$, porém $1+2+3+4+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$ que é a soma dos termos de uma PA.Então:

$$\boxed{P = a_1^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Exercícios

1) A sequência seguinte é uma progressão geométrica, observe: (2, 6, 18, 54...). Determine o 8º termo dessa progressão.

2) Numa PG de quatro termos, a razão é 5 e o último termo é 375. Determine o primeiro termo dessa PG.

3) Sabendo que uma PG tem $a_1 = 4$ e razão $q = 2$, determine a soma dos 10 primeiros termos dessa progressão.

4) Se cada coelha de uma colônia gera três coelhas, qual o número de coelhas da 7ª geração que serão descendentes de uma única coelha?

5) Um carro, cujo preço à vista é R$ 24 000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R$ 4 000,00 e a quarta parcela de R$ 1 000,00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

6) Comprei um automóvel e vou pagá-lo em 7 prestações crescentes, de modo que a primeira prestação seja de 100 reais e cada uma das seguintes seja o dobro da anterior. Qual é o preço do automóvel?

7) Ao escalar uma trilha de montanha, um alpinista percorre 256 m na primeira hora, 128 na segunda hora, 64 na terceira hora e assim sucessivamente. Determine o tempo (em horas) necessário para completar um percurso de 480 m.

8) Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. Elas deverão ser empilhadas respeitando a seguinte ordem: uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha. Por exemplo:

1ª pilha	2ª pilha	3ª pilha	4ª pilha
uma tábua	duas tábuas	quatro tábuas	oito tábuas

Determine a quantidade de tábuas empilhadas na 12ª pilha.

9) Resolva a equação: $X + \frac{X}{2} + \frac{X}{4} + \frac{X}{8} + \frac{X}{16} + \frac{X}{32} \ldots = 100$