

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Veja a seguinte situação:

Um supermercado lançou uma campanha publicitária na qual afirma que o vencedor receberá um bônus inicial de R\$ 800,00 em compras durante seis meses, e que esse bônus aumentará em R\$ 50,00 a cada mês. Qual serão os valores mensais de compras desse sortido nesse supermercado?

No primeiro mês fará R\$ 800,00 de compras.

No segundo mês fará $R\$ 800,00 + R\$ 50,00 = R\$ 850,00$ de compras.

No terceiro mês fará $R\$ 850,00 + R\$ 50,00 = R\$ 900,00$ de compras.

No quarto mês fará $R\$ 900,00 + R\$ 50,00 = R\$ 950,00$ de compras.

No quinto mês fará $R\$ 950,00 + R\$ 50,00 = R\$ 1000,00$ de compras.

No sexto mês fará $R\$ 1000,00 + R\$ 50,00 = R\$ 1050,00$ de compras.

Nessa situação, os valores em reais de compras serão representados pela sequência:

(800, 850, 900, 950, 1000, 1050)

Notamos que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido por meio da adição do termo anterior com uma constante, que no caso é 50 reais.

Sequência desse tipo são chamadas de Progressões Aritméticas.

Definição

Denomina-se **progressão aritmética (PA)** a sequência em que cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando-se uma constante r ao termo anterior. Essa constante r chama-se **razão** da progressão aritmética.

Representação de uma PA

Representando por a_1 o primeiro elemento, por a_2 o segundo elemento, e assim sucessivamente, até o último elemento que é representado por a_n . Então teremos a seguinte representação para uma progressão aritmética:

($a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$).

A representação acima se refere a uma **PA** finita com **n** elementos. Caso a sucessão seja infinita, utilizamos a seguinte representação:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$.

A sequência (3,7,11,15, 19) é uma progressão aritmética finita de razão 4 pois:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 + 4 = 7$$

$$a_3 = 7 + 4 = 11$$

$$a_4 = 11 + 4 = 15$$

$$a_5 = 15 + 4 = 19$$

A sequência (5,8,11,14, 17, ...) é uma progressão aritmética infinita de razão 3.

Observe que, para obtemos a razão da PA, basta fazer as diferenças entre cada termo e o seu antecessor.

$$(5, 8, 11, 14, 17, \dots) \Rightarrow 17 - 14 = 3, \quad 14 - 11 = 3, \quad 8 - 5 = 3$$

Classificação das progressões aritméticas

Dependendo da razão **r**, uma PA pode ser:

Constante ou estacionária: se todos os termos são iguais. Neste caso sua **razão** é igual a **zero**.

$$(4, 4, 4 \dots), \quad r = 0$$

Crescente: quando a sua **razão** é maior que zero (**positiva**), ou seja, se cada termo, a partir do segundo, é **maior** que o seu anterior.

$$(10, 15, 20, 25, \dots), \quad r = 5 > 0$$

Decrescente: quando a sua razão é menor que zero (**negativa**), ou seja, se cada termo, a partir do segundo, é **menor** que o seu anterior.

$$(34, 28, 22, 16, \dots), \quad r = -6 < 0$$

Fórmula do termo geral de uma PA

A partir da definição, podemos escrever os elementos da PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ da seguinte forma:

$$a_1 = a_1$$

O segundo termo é igual ao primeiro termo, a_1 , mais a razão r :

$$a_2 = a_1 + r$$

O terceiro termo é resultado da soma do segundo termo com a razão:

$$a_3 = a_2 + r$$

Mas vimos que $a_2 = a_1 + r$, substituindo-o na expressão acima temos:

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

Portanto, $a_3 = a_1 + 2r$

O quarto termo é resultado da soma do terceiro termo com a razão e como sabemos que $a_3 = a_1 + 2r$, temos:

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

Portanto, $a_4 = a_1 + 3r$

Seguindo este raciocínio, o quinto termo será $a_5 = a_1 + 4r$

O sexto termo será $a_6 = a_1 + 5r$, e assim por diante.

Desse modo encontramos o **termo de ordem n**, denominado **termo geral** da **PA**, que é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Exemplo:

Numa PA com $a_1 = 3$ e $r = 5$, calcule o quarto e o sétimo termos.

Fórmula geral: $a_n = a_1 + (n - 1)r$

Quarto termo, $n = 4$:

$$a_4 = 3 + (4 - 1). 5 = 3 + 3 . 5 = 3 + 15 = 18$$

Sétimo termo, $n = 7$:

$$a_7 = 3 + (7 - 1). 5 = 3 + 6 . 5 = 3 + 30 = 33$$

No nosso exemplo inicial poderíamos calcular o valor mensal de qualquer mês pela fórmula:

Um supermercado lançou uma campanha publicitária na qual afirma que o vencedor receberá um bônus inicial de R\$ 800,00 em compras durante seis meses, e que esse bônus aumentará em R\$ 50,00 a cada mês. Qual serão o valor de compras no quinto mês?

$$a_1 = 800, r = 50 \text{ e } n = 5$$

$$a_5 = 800 + (5 - 1) \cdot 50$$

$$a_5 = 800 + 4 \cdot 50$$

$$a_5 = 800 + 200$$

$$a_5 = 1000$$

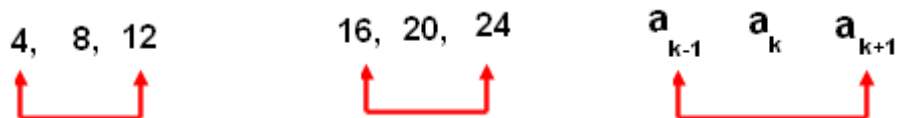
Portanto, no quinto mês fará R\$ 1000,00 de compras, com tínhamos visto antes.

Propriedades de uma PA

Observe a PA finita (4, 8, 12, 16, 20, 24, 28).

Propriedade 1

Se tomarmos três de seus termos:



Observe que qualquer termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre o anterior e o posterior.

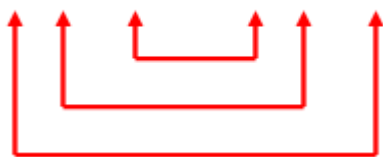
$$\frac{4+12}{2} = 8$$

$$\frac{16+24}{2} = 20$$

$$\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = a_k$$

Propriedade 2

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28



Observe que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. No caso de uma PA com um número ímpar de termos, o termo central (médio) é a média aritmética entre os termos extremos ou termos equidistantes dos extremos.

$$4 + 28 = 32$$

$$8 + 24 = 32$$

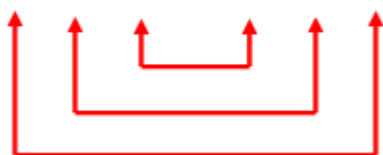
$$12 + 20 = 32$$

Termo central $\frac{32}{2} = 16$

Soma dos termos de uma P.A.

Para expormos o nosso raciocínio utilizaremos a PA (2, 5, 8, 11, 14, 17)

2, 5, 8, 11, 14, 17



Como já vimos, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, portanto temos:

$$2 + 17 = 19$$

$$5 + 14 = 19$$

$$8 + 11 = 19$$

Repare que há três somas, ou seja, a metade do número de termos da PA, cujo resultado foi 19. Portanto, a soma dos termos da PA será:

$$S_6 = \frac{6}{2} \cdot (2 + 17) = 3 \cdot 19 = 57$$

Generalizando, temos que a **soma de todos os termos** de uma progressão aritmética é igual ao produto da metade do número de termos pela soma do primeiro com o enésimo termo. Em notação matemática temos:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \quad \text{ou}$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Observação importante:

Para evitar o uso de muitas incógnitas na resolução de certos problemas de progressão aritmética podemos utilizar recursos bastante úteis. Veja:

PA's desconhecidas de 3, 4, ou 5 termos.

Para 3 termos: $(x, x + r, x + 2r)$ ou $(x - r, x, x + r)$. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma PA de três termos, conhecendo a soma deles.

Para 4 termos: $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$ ou $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$, nesse caso, note que $r = 2y$. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma PA de quatro termos, conhecendo a soma deles.

Para 5 termos: $(x, x + r, x + 2r, x + 3r, x + 4r)$ ou $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma PA de cinco termos, conhecendo a soma deles.

Exemplos:

1) Determine a PA crescente de três termos, sabendo que a soma desses termos é 12 e o produto é 280.

A representação mais adequada é $(x - r, x, x + r)$.

Pelo enunciado, temos:

$$x - r + x + x + r = 21 \quad \Rightarrow \quad 3x = 21 \quad \Rightarrow \quad x = 7$$

$$(x - r) \cdot x \cdot (x + r) = (7 - r)(7 + r) \cdot 7 = 280 \quad \Rightarrow \quad (49 - r^2) \cdot 7 = 280$$

$$343 - 7r^2 = 280 \quad \Rightarrow \quad 7r^2 = 280 - 343 \quad \Rightarrow \quad 7r^2 = 63 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 3$$

Como devemos ter uma PA crescente, só nos interessa a razão positiva, ou seja, $r = 3$. Assim: $(x - r, x, x + r) = (7 - 3, 7, 7 + 3) = (4, 7, 10)$

Portanto, a PA procurada é $(4, 7, 10)$.

2) Determine a PA decrescente de quatro termos, sabendo que a soma desses termos é 16 e a soma de seus quadrados é 144.

Resolução:

A representação mais adequada é $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$.

Sabemos que para essa representação $r = 2y$, ou seja:

$$r = (x - y) - (x - 3y) \text{ ou } (x + y) - (x - y) \text{ ou } (x + 3y) - (x + y) = 2y$$

Pelo enunciado, temos que a soma desses termos é 16:

$$x - 3y + x - y + x + y + x + 3y = 16$$

$$4x = 16$$

$$x = 4$$

E, a soma de seus quadrados é 144 .

$$(x - 3y)^2 + (x - y)^2 + (x + y)^2 + (x + 3y)^2 = 144$$

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 6xy + 9y^2 = 144$$

$$4x^2 + 20y^2 = 144$$

Como $x = 4$, temos:

$$4 \cdot 4^2 + 20y^2 = 144$$

$$64 + 20y^2 = 144$$

$$20y^2 = 80$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

Como devemos ter uma PA decrescente, só nos interessa y negativa, ou seja, $y = -2$. Assim, $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$ é:

$$x - 3y = 4 - 3 \cdot (-2) = 4 + 6 = 10.$$

$$x - y = 4 - (-2) = 4 + 2 = 6$$

$$x + y = 4 + (-2) = 4 - 2 = 2$$

$$x + 3y = 4 + 3 \cdot (-2) = 4 - 6 = -2$$

Portanto, a PA procurada é (10, 6, 2, -2)

Observe que $r = 2y$, ou seja, $r = -4$.

Termos aleatórios

Em problemas que se referem a **termos aleatórios** de uma PA, convém fazer a decomposição desses termos por meio da fórmula do termo geral.

Exemplos:

Sabe-se que, numa PA infinita, $a_2 + a_5 = 18$ e $a_3 + a_6 = 26$. Determine-a.

Resolução:

Sabemos que:

$$a_2 = a_1 + r, \quad a_5 = a_1 + 4r, \quad a_3 = a_1 + 2r, \quad , \quad a_6 = a_1 + 5r$$

Note que, ao invés de 4 incógnitas, temos apenas duas.

Assim,

$$a_2 + a_5 = 18 \quad \Rightarrow \quad a_1 + r + a_1 + 4r = 18 \quad \Rightarrow \quad 2a_1 + 5r = 18$$

$$a_3 + a_6 = 26 \quad \Rightarrow \quad a_1 + 2r + a_1 + 5r = 26 \quad \Rightarrow \quad 2a_1 + 7r = 26$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} 2a_1 + 5r = 18 \\ 2a_1 + 7r = 26 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, $r = 4$ e $a_1 = -1$.

Portanto, a PA é dada por $(-1, 3, 7, 11, 15, 19, \dots)$

Exercícios

- 1) Determine o 20º termo da PA (4, 8, 12 ,16....)
- 2) Sabendo que o 1º termo de uma PA é igual a 2 e que a razão equivale a 5, determine o valor do 18º termo dessa sequência numérica.
- 3) Na sequência numérica (–1, 3, 7, 11, 15, ...), determine a soma dos 12 primeiros termos.
- 4) Quantos termos tem a PA (5, 10, ..., 785)?
- 5) Achar a razão da PA (3, x, 27...).
- 6) Qual é a soma dos números ímpares entre 8 a 60?
- 7) Um atleta corre sempre 500 metros a mais do que no dia anterior. Sabendo-se que ao final de 15 dias ele correu um total de 67 500 metros, qual o número de metros percorridos no 3º dia?
- 8) Um estacionamento cobra R\$ 6,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, os preços caem em progressão aritmética. O valor da segunda hora é R\$ 4,00 e o da sétima é R\$ 0,50. Quanto gastará o proprietário de um automóvel estacionado 5 horas nesse local?
- 9) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 3300 passagens; em fevereiro, 3450; em março, 3600. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?
- 10) Um pintor consegue pintar uma área de 5 m^2 no primeiro dia de serviço e, a cada dia, ele pinta 2 m^2 a mais do que pintou no dia anterior. Em que dia ele terá conseguido pintar 31 m^2 ?