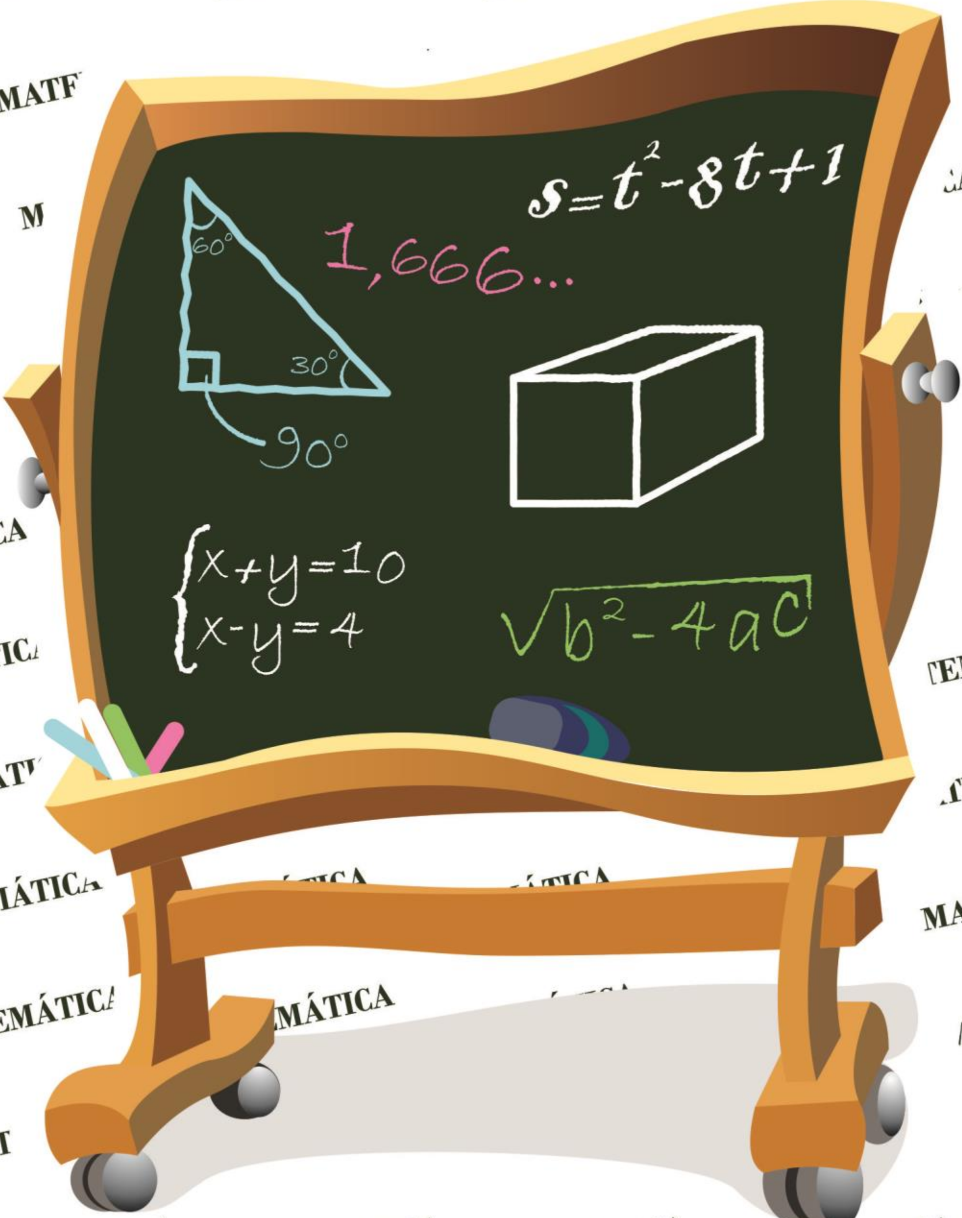
MATEMÁTICA



FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

ETEVM
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

GOVERNO DO Rio de Janeiro

2º ANO

Probabilidade

COORDENAÇÃO

SERGIO LOPES RODRIGUES

Probabilidade

A história da teoria das probabilidades teve início com os jogos de azar. Hoje podemos utilizá-lo em muitas outras áreas como, por exemplo, na área técnica, médica, comercial e etc.

O estudo da **probabilidade** vem da necessidade de em certas situações, prevermos a possibilidade de ocorrência de determinados fatos. É por meio da teoria da probabilidade que se estabelece, por exemplo, o risco da tomada de decisão.

Veja a probabilidade de acerto na Mega-Sena:

PROBABILIDADE DE ACERTO NA MEGA-SENA				
Quantidade Nº Jogados	**Valor de Aposta**	**Probabilidade de acerto (1 em...)**		
		Sena	**Quina**	**Quadra**
6	2,00	50.063.860	154.518	2.332
7	14,00	7.151.980	44.981	1.038
8	56,00	1.787.995	17.192	539
9	168,00	595.998	7.791	312
10	420,00	238.399	3.973	195
11	924,00	108.363	2.211	129
12	1.848,00	54.182	1.317	90
13	3.432,00	29.175	828	65
14	6.006,00	16.671	544	48
15	10.010,00	10.003	370	37

Fonte:http://www1.caixa.gov.br/loterias/loterias/megasena/probabilidades. Acesso em 14/02/2014.

Para iniciarmos o estudo da probabilidade, vamos a seguir definir alguns conceitos importantes.

Experimento Aleatório

É aquele experimento que quando repetido em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes, ou seja, são resultados ocorridos ao acaso. Veja alguns exemplos:

Quando lançamos uma moeda para cima, o resultado é imprevisível, pois tanto pode dar cara, quanto pode dar coroa.
Se ao invés de uma moeda, jogarmos um dado, o resultado será mais imprevisível ainda, pois aumentamos o número de possibilidades de resultado.

Espaço Amostral

Ao lançarmos uma moeda não sabemos qual será a face que ficará para cima, no entanto podemos afirmar que será cara, ou coroa, pois uma moeda só possui estas duas faces. Neste exemplo, ao conjunto { cara, coroa } damos o nome de **espaço amostral**, pois ele é o conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer neste experimento aleatório. No caso de ser lançado um dado, o espaço amostral será o conjunto { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }. Representamos o espaço amostral pela letra S.

Evento

Chama-se **evento** qualquer subconjunto A do espaço amostral S.

Veja alguns exemplos:

No lançamento de um dado, o espaço amostral é S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }. O evento "número ímpar" é o conjunto A = { 1; 3; 5} , o evento "número par" é A = { 2, 4, 6 }.
Na experiência "retirar uma bola de uma urna" que contém três bolas brancas (b_1, b_2, b_3), e duas bolas pretas (p_1, p_2), o espaço amostral é S = {b_1, b_2, b_3, p_1, p_2}. O evento "bola branca" é conjunto A = {b_1, b_2, b_3}.

É fundamental diante de um problema de probabilidade verificar quem vem a ser o espaço amostral e o evento. E, depois, determinar a valor de cada um deles. Podemos dizer que o espaço amostral são os resultados possíveis de ocorrer no experimento aleatório e o evento são os resultados favoráveis.

Devemos observar sempre que o evento está contido no espaço amostral.

Probabilidade de Ocorrência de um Evento

Se em um experimento aleatório as possibilidades são igualmente prováveis, ou seja, todos os seus elementos tenham a mesma possibilidade de ocorrer, então a probabilidade P(A) de ocorrer um evento A é igual a razão entre o **número de elementos do evento A** n(A) e o **número de elementos do espaço amostral S** n(S).

Podemos dizer também que P(A) é razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis de um experimento.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n\acute{u}mero\ de\ resultados\ favor\acute{a}veis}{n\acute{u}mero\ de\ resultados\ poss\acute{\imath}veis}$$

Exemplos:

1) No lançamento de um dado qual a probabilidade de sair um número par ?

A = { 2,4,6 } => n(A) = 3

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6} n(S) = 6

P(A) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Portanto a probabilidade de sair um número par é $\frac{1}{2}$.

Normalmente representamos probabilidades através de frações, mas também podemos representá-las por números decimais, ou até mesmo por porcentagens.

P(A) = $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

Um jovem casal pretende ter 3 filhos. Qual é a probabilidade de que tenham:

a) pelo menos um casal?

Se representarmos por M os filhos do sexo masculino e por F os filhos do sexo feminino, podemos representar assim o espaço amostral e o evento A:

S = { (F, F, F), (F, F, M), (F, M, F), (F, M, M), (M, F, F), (M, F, M), (M, M, F), (M, M, M) } => n(S) = 8

A = { (F, F, M), (F, M, F), (F, M, M), (M, F, F), (M, F, M), (M, M, F) } =>

n(A) = 6

P(A) = $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Portanto, a probabilidade de que tenham pelo menos um casal é $\frac{3}{4}$.

Em forma de número decimal e porcentagem seria:

$\frac{3}{4}$ = 0,75 = 75%

b) pelo menos uma menina?

A = {(F, F, M), (F, M, F), (F, M, M), (F, F, F),(M, F, F), (M, F, M), (M, M, F) }

⇨ n(A) = 7

P(A) = $\frac{7}{8}$

Portanto, a probabilidade de que tenham pelo menos uma menina é $\frac{7}{8}$.

Em forma de número decimal e porcentagem seria:

$\frac{7}{8}$ = 0,875 = 87,5%

Podemos observar que a probabilidade é um número entre zero e um, inclusive, o que significa que no mínimo não há nenhuma hipótese do evento acontecer e no máximo o evento sempre ocorrerá:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

No lançamento de um dado a probabilidade de obtermos um número menor que 6 é sempre possível de ocorrer, portanto P(A) = 1. A probabilidade de ocorrer um número maior que 6 é impossível, portanto, P(A) = 0.

Evento Complementar

Chama-se de evento complementar de um evento **A** num espaço amostral **S**, ao evento B tal que **B = S – A**, ainda que **S = A + B.**

No lançamento de um dado, o evento complementar do evento "número ímpar" é o evento "número par"
A = { 1, 3, 5}   ,   B = {2, 4, 6}.

Podemos verificar que **B = S – A ou S = A + B**

Se A e B são eventos complementares, então:

P(A) + P(B) = 1   ou   P(B) = 1 – P(A)

Veja alguns exemplos:

1) Uma moeda é lançada 4 vezes. Qual é a probabilidade de obtermos ao menos uma coroa?

Recorrendo ao princípio fundamental da contagem podemos calcular o número de elementos do espaço amostral.

Sabemos que em cada lançamento podemos obter cara ou coroa, portanto, duas possibilidades em cada um dos quatro lançamentos. Então:

n(S) = 2 **.** 2 **.** 2 **.** 2 = 16

Agora precisamos saber o número de elementos do evento **B**, referente a quatro lançamentos de uma moeda, quando obtemos ao menos uma coroa.

È fácil saber os resultados que **não apresentam nenhuma coroa**, e ele nos permite descobrir o número dos que **possuem ao menos uma**.

Apenas o evento { cara, cara, cara, cara }, **não apresentam nenhuma coroa** ou seja, temos 1 resultado. Como o número total de eventos é 16 e 1 deles não apresenta qualquer coroa, então os outros 15 apresentam **ao menos uma**.

Então:

P(B) = $\frac{15}{16}$

Portanto, a probabilidade de ocorrer **ao menos uma coroa** é $\frac{15}{16}$

Poderíamos calcular também da seguinte maneira:

Probabilidade de ocorrer **nenhuma coroa**.

P(A) = $\frac{1}{16}$

Probabilidade de ocorrer **ao menos uma coroa**

P(B) = 1 – P(A)

$$P(B) = 1 - \frac{1}{16}$$

P(B) = $\frac{15}{16}$

2) No lançamento de um dado qual é a probabilidade de obtermos **um número par ou um 5**?

A probabilidade de ocorrer um número par é P(A) = $\frac{3}{6}$, já que temos 3 possibilidades em 6. A probabilidade de ocorrer um número 5 é P(B) = $\frac{1}{6}$, já que temos 1 possibilidade em 6.

Quando utilizamos a conjunção "**OU**" (um número par "OU" um 5), estamos tratando da união de probabilidades. Logo, devemos somar as probabilidades individuais. Então:

P(A∪ B) = P(A) +P(B) = $\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Portanto, a probabilidade de obtermos **um número par ou um 5 é** $\frac{2}{3}$ **.**

Note que no exemplo acima o número 5 não é um número par. Quando isso ocorre dizemos que os eventos A e B são mutuamente exclusivos, isto é, os eventos não possuem elementos em comum ($A \cap B = \emptyset$).

Agora observe a situação:

Num jogo de dominó se pegarmos uma peça qualquer, qual a probabilidade dela possuir ao menos um 3 ou 4 na sua face?

Como o dominó tem 28 peças, então n(S) = 28

Chamemos de A o evento da ocorrência de um 3, então:

A = { (0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3) } => n(A) = 7

Chamemos de B o evento da ocorrência de um 4, então:

B = { (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) } => n(B) = 7

Veja que o elemento (4, 3) está contido nos dois eventos, logo $A \cap B = \{(3,4)\}$. Neste caso, quando calcularmos a probabilidade devemos diminuir da soma o elemento repetido. Vejamos então como fica:

$A \cap B = \{(3,4)\}$ => n($A \cap B) = 1$

P(A∪ B) = P(A) + P(B) - P($A \cap B)$ = $\frac{7}{28} + \frac{7}{28} - \frac{1}{28} = \frac{13}{28}$

Portanto, a probabilidade procurada **é** $\frac{13}{28}$ **.**

Veja essa outra situação:

Em dois lançamentos sucessivos de um dado qual é a probabilidade de obtermos um 2 e depois um 4?

Observe que os eventos citados são independentes, pois o fato de sair um 2 no primeiro lançamento, não afeta a possibilidade de sair um 4 no segundo.

Quando estamos numa situação de eventos sucessivos e independentes estamos tratando do produto de probabilidades. Logo, devemos multiplicar as probabilidades individuais. Então:

P(A e B) = P(A) . P(B) $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Portanto, a probabilidade de obtermos um 2 e depois um 4 é $\frac{1}{36}$.

Veja outro exemplo:

Uma urna tem 30 bolas, sendo 10 pretas e 20 vermelhas. Se ocorrer um sorteio de 2 bolas, uma de cada vez e sem reposição, qual será a probabilidade de a primeira ser preta e a segunda ser vermelha?

Há 30 bolas, o espaço amostral S = 30

Evento A bolas pretas, n(A) = 10

Bola preta na primeira retirada, P(A) = $\frac{10}{30}$

Como foi retirada uma bola e não foi reposta, o segundo espaço amostral é S = 29. Se fosse reposta o espaço amostral continuaria S = 30.

Evento B bolas vermelhas, n(B) = 20

Bola vermelha na segunda retirada P(B) $= \frac{20}{29}$

P(A e B) = P(A) . P(B) $= \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} = \frac{20}{87}$

Portanto, a probabilidade procurada é $\frac{20}{87}$.

Probabilidade Condicional

A **probabilidade condicional** que denotamos por P(A**/**B) refere-se à probabilidade de ocorrer um evento A, sabendo que ocorreu um outro evento

B, ambos do espaço amostral S. É importante observar que ela é calculada sobre o evento B e não em função o espaço amostral S.

Veja o exemplo:

Uma escola de idiomas com 900 alunos, 750 alunos fazem o curso de inglês, 500 fazem o curso de espanhol e 350 cursam ambos os cursos. Selecionando-se ao acaso um estudante do curso de inglês, qual a probabilidade dele também estar cursando o curso de espanhol?

Chamemos de A o evento que representa o curso de espanhol e B o evento que representa o curso de inglês. Então:

n(s) = 900 , n(A) = 500, n(B) = 750, n(A∩B) = 350

Note que a probabilidade está condiciona ao curso de inglês, não a quantidade total de alunos. Portanto, o número de casos possíveis é n(B) = 750. Observe também que o número de casos favoráveis é a interseção entre os dois eventos n(A∩B) = 350. Portanto a **probabilidade condicional** P(A/B) **será:**

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{350}{750} = \frac{7}{15}$$

Portanto, a probabilidade procurada é $\frac{7}{15}$.

Veja o seguinte exemplo:

Uma moeda é lançada três vezes:

a) Qual a probabilidade de sair cara duas vezes?

b) Qual a probabilidade de sair cara duas vezes, sabendo que o resultado do primeiro lançamento foi cara.

Resolução:

a) Qual a probabilidade de sair cara duas vezes?

Denotamos cara por c e coroa por k .

Nesse caso o espaço amostral é:

S = { ccc, cck, ckc, ckk, kcc,kck,kkc,kkk } , n(S) = 8

Chamemos sair cara duas vezes de A. Então:

A = { cck, ckc, kcc }, n(A) = 3

Logo, P(A) $= \frac{3}{8}$

b) Qual a probabilidade de sair cara duas vezes, sabendo que o resultado do primeiro lançamento foi cara.

Agora, consideramos que, ao lançarmos a moeda três vezes, o resultado do primeiro lançamento foi cara. Logo, o espaço amostral passa a ser B:

B = { ccc, cck, ckc, ckk } , n(S) = 4

Em que (A∩B) = { cck, ckc } , n(A∩B) = 2.

Portanto, $P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS

1) Uma bola será retirada de uma sacola contendo 4 bolas azuis, 5 bolas verdes e 6 bolas amarelas. Qual a probabilidade desta bola:

a) ser verde?

b) ser azul ou amarela?

2) Três moedas são lançadas ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de as três moedas caírem com a mesma face para cima?

3) Em dois lançamentos sucessivos de um mesmo dado, qual a probabilidade de ocorrer um número maior que 3 e o número 1.

4) Em uma caixa há 4 bolas verdes, 5 azuis, 4 vermelhas e 3 brancas. Se tirarmos sem reposição 4 bolas desta caixa, uma a uma, qual a probabilidade de tirarmos nesta ordem bolas nas cores verde, azul, vermelha e branca?

5) Uma moeda é lançada duas vezes. Calcule a probabilidade de obtermos cara no segundo lançamento.

6) Numa urna existem 15 bolas numeradas de 1 a 15. Retirando uma bola ao acaso, qual a probabilidade desta bola ser:

a) um múltiplo de 5?

b) um múltiplo de 5, visto que é maior que 7?

c) divisível por 3 ou divisível por 4?

d) divisível por 3 e divisível por 4?

7) Numa urna há 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Serão retiradas dessa urna duas bolinhas, ao acaso, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de sair:

a) um múltiplo de 10 na primeira e um número ímpar na segunda?

b) um múltiplo de 5 na segunda, visto que na primeira saiu um 10.

c) um múltiplo de 5 na segunda, visto que na primeira saiu um 12.

8) Em uma pesquisa realizada entre 3000 consumidores, constatou que 1500 deles trabalham com cartões de crédito da bandeira MasterCard, 1800 trabalham com cartões de crédito da bandeira VISA e que 300 trabalham com cartões de crédito de ambas as bandeiras. Qual a probabilidade de ao escolhermos deste grupo uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um dos consumidores que utilizam cartões de crédito da bandeira MasterCard?

9) ENEM 2012 - José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

A) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

B) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

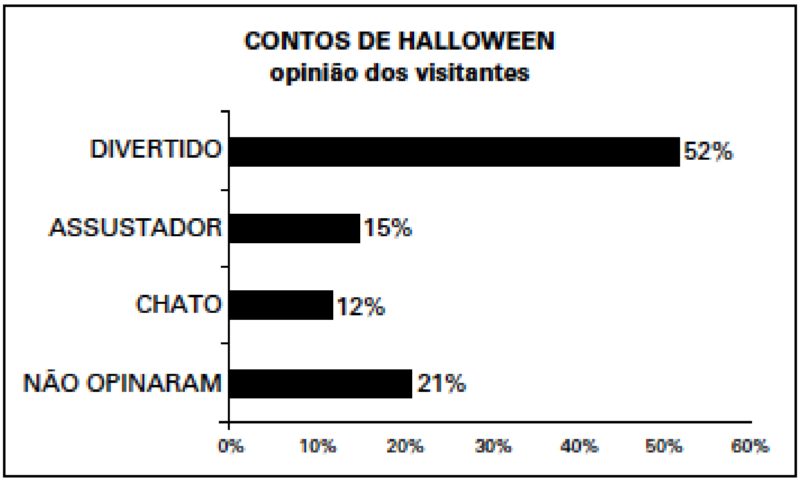
C) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

D) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

E) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

10) ENEM 2012 - Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados ”Contos de Halloween“. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas relações em: ”Divertido“, ”Assustador“ ou ”Chato“. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem ”Contos de Halloween“.

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto ”Contos de Halloween“ é ”Chato“ é mais aproximada por

A) 0,09. B) 0,12. C) 0,14. D) 0,15. E) 0,18.

Experimentos Binomiais

Para entendermos o que vem a ser um experimento binomial, iremos supor o lançamento de uma moeda n vezes, no intuito de verificar a frequência de ocorrência de cada face. No caso do lançamento da moeda, temos apenas dois resultados possíveis: cara ou coroa. Sabemos que cada lançamento será independente um do outro, isto é, a probabilidade de ocorre, por exemplo, cara em um lançamento não depende dos resultados dos lançamentos anteriores. A repetição de ensaios independentes é característica desse tipo de experimento, pois cada ensaio apresenta dois resultados possíveis, indicados por sucesso ou fracasso. A esse experimento chamamos de experimento binomial.

Então, podemos definir que um experimento binomial é um experimento de probabilidade que deve preencher os seguintes critérios:

- O experimento é repetido por um número fixo de tentativas, onde cada tentativa é independente uma das outras.

- Há apenas dois resultados passíveis de interesse para cada tentativa. Os resultados podem ser classificados como sucesso (S) ou fracasso (F).

- A probabilidade de sucesso P(S) é a mesma para cada tentativa.

Fórmula para cálculo das probabilidades de um experimento binomial

Considere uma experiência sendo realizada **n** vezes, dentro das mesmas condições, de maneira que os resultados de cada experiência sejam independentes. Cada tentativa ocorre, obrigatoriamente, um evento **A** cuja probabilidade é **p** ou o evento $\bar{A}$ (complemento de **A**) cuja probabilidade é **1 – p**. Qual a probabilidade de ocorrer o evento **A** em **K** vezes?

Neste caso, num total de **n** experiências, ocorrerá **k** vezes o evento **A**, necessariamente também ocorrerá exatamente **n – k** vezes o evento $\bar{A}$. Note que **k** representa o número de tentativas que resultam em sucesso e **n - k** que resultam em fracasso.

Como a probabilidade de ocorrer o evento **A** é **p** e do evento $\bar{A}$ é **1 – p**, a probabilidade de ocorrer **k** vezes o evento **A** e **n – k** vezes o evento $\bar{A}$ é:

$$\underbrace{p \,.\, p \,.\, p \,.\, \ldots \,.\, p}_{\text{k fatores}} \,.\, \underbrace{(1-p) \,.\, (1-p) \,.\, \ldots \,.\, (1-p)}_{\text{(n - k) fatores}} = p^k \,.\, (1-p)^{n-k}$$

Porém, as respostas podem ocorrer de forma aleatória (em outras ordens). Então, o número de maneiras de escolher **k** vezes o evento **A** entre as **n** vezes possíveis é, portanto, o número das combinações $\mathbf{C_{n,k}}$. Sendo assim, há $\mathbf{C_{n,k}}$ eventos distintos, mas que possuem a mesma probabilidade $\mathbf{p^k \,.\, (1 - p)^{n-k}}$ de ocorrer. Logo, a probabilidade desejada é:

$$\boxed{P = C_{n,k} \,.\, p^k \,.\, (1 - P)^{n-k}}$$

Lembrete:

Também podemos representar $\mathbf{C_{n,k}}$ por $\binom{n}{k}$

Exemplo

Qual é a probabilidade de obtermos 3 vezes o número 4 ao lançarmos um dado 5 vezes?

Solução

O espaço amostral do lançamento de um dado é:

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Como estamos interessados apenas nos resultados iguais a 4, representamos tal evento por:

A = { 4 }

Em relação ao número de elementos temos que n(A) = 1 e n(S) = 6, portanto a probabilidade da ocorrência de um 4 em um lançamento é:

$$P = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P = \frac{1}{6}$$

P é a probabilidade de sucesso em um lançamento, a probabilidade de fracasso é dada por 1 - p, portanto, $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Vamos calcular o número de combinações **$C_{n,k}$**:

n é o número total lançamentos, então n = 5.

k é o número de sucessos, logo k = 3.

Sabemos que $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

$C_{5,3} = 10$

Agora temos todos os dados para podermos calcular a probabilidade desejada.

Vejamos:

$$P = C_{n,k} \cdot p^{k} \cdot (1 - P)^{n-k}$$

$$P = 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2} = 10 \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5^2}{6^2} \quad 10 \cdot \frac{5^2}{6^5} \quad = \frac{250}{7776} = \frac{125}{3888}$$

Portanto, a probabilidade de obter 3 vezes o número 4 em 5 lançamento é $\frac{125}{3888}$.

Podemos representar a probabilidade na sua forma decimal, bastando realizarmos a divisão de 125 por 3888, que resulta em aproximadamente 0,0321 e também na forma de porcentagem, bastando multiplicarmos 0,0321 por 100% que resulta em 3,21%.

Exercícios

1) Jogando uma moeda não viciada 10 vezes, qual é a probabilidade de obtermos exatamente 7 caras?

2) Certo medicamento apresentou eficácia em 90% das vezes que foi ministrado. Esse medicamento foi aplicado em 8 pacientes. Qual é a probabilidade desse tratamento ser eficiente para exatamente 6 desses pacientes?

3) Uma prova objetiva de 10 questões, cada uma com 4 opções de respostas das quais apenas uma é a correta, foi respondida ao acaso. Calcule a probabilidade de se obter exatamente 6 acertos.

Bibliografia

BARROSO,Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva,2010.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

DANTE, Luiz Roberto, Matemática:Contexto e Aplicações. São Paulo. Ática, 2010.

Sites:

http://www.somatematica.com.br

http://www.escola 24h.com.br

http://www.matematica.com.br

http://www.matematicadidatica.com.br