

Resolução das atividades complementares



Matemática

M1 – Trigonometria no ciclo

p. 7

1 Expresse:

a) 45° em radianos $\frac{\pi}{4}$ rad

c) 225° em radianos $\frac{5\pi}{4}$ rad

e) $\frac{11\pi}{12}$ rad em graus 165°

b) 330° em radianos $\frac{11\pi}{6}$ rad

d) $\frac{\pi}{3}$ rad em graus 60°

f) $\frac{33\pi}{24}$ rad em graus $247^\circ 30'$

Resolução:

a) 180° — π rad
 45° — x

$$\frac{180^\circ}{45^\circ} = \frac{\pi}{x} \rightarrow x = \frac{\pi \cdot 45^\circ}{180^\circ} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

b) 180° — π rad
 330° — x

$$\frac{180^\circ}{330^\circ} = \frac{\pi}{x} \rightarrow x = \frac{\pi \cdot 330^\circ}{180^\circ} \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

c) 180° — π rad
 225° — x

$$\frac{180^\circ}{225^\circ} = \frac{\pi}{x} \rightarrow x = \frac{\pi \cdot 225^\circ}{180^\circ} \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

d) 180° — π rad
 x — $\frac{\pi}{3}$ rad

$$\frac{180^\circ}{x} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} \rightarrow \pi x = 180^\circ \cdot \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 60^\circ$$

e) 180° — π rad
 x — $\frac{11\pi}{12}$ rad

$$\frac{180^\circ}{x} = \frac{\pi}{\frac{11\pi}{12}} \rightarrow \pi x = 180^\circ \cdot \frac{11\pi}{12} \rightarrow x = 165^\circ$$

f) 180° — π rad
 x — $\frac{33\pi}{24}$ rad

$$\frac{180^\circ}{x} = \frac{\pi}{\frac{33\pi}{24}} \rightarrow \pi x = 180^\circ \cdot \frac{33\pi}{24} \rightarrow x = 247,5^\circ = 247^\circ 30'$$

[illegible]
$$x = \frac{2\pi r \cdot 25}{60} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 25}{60} \rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

A medida do raio é, aproximadamente, 546 metros.

O comprimento do arco é, aproximadamente, 7,41 cm.

5 Ao meio-dia, o ponteiro dos minutos de um relógio coincide com o ponteiro das horas. A que horas acontece a próxima coincidência? **13h 5min 27s**

Resolução:

Em 3600", o ponteiro das horas percorre 30°, e o dos minutos, 360°.

$$\begin{array}{rcl} \text{ponteiro das horas: } 3600'' & \text{-----} & 30^\circ \\ & x & \text{-----} \alpha \end{array}$$

$$\alpha = \frac{x}{120} \quad (\text{I})$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ponteiro dos minutos: } 3600'' & \text{-----} & 360^\circ \\ & x & \text{-----} 360^\circ + \alpha \end{array}$$

$$x = \frac{3600 \cdot (360 + \alpha)}{360} \rightarrow x = 10 \cdot (360 + \alpha) \quad (\text{II})$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$x = 10 \cdot \left(360 + \frac{x}{120} \right) \rightarrow x = 3600 + \frac{10x}{120} \rightarrow x - \frac{x}{12} = 3600 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{12x - x}{12} = 3600 \rightarrow 11x = 43200 \rightarrow x = 3927''$$

$$\frac{3927}{60} = 65' 27'' = 1\text{h } 5' 27''$$

Portanto, a próxima coincidência acontecerá às 13h 5min 27s.

6 Um circuito de *kart* tem uma pista circular de raio 500 m. Um piloto, para testar a pista e o *kart*, desenvolve uma velocidade constante de 80 km/h. Determine o número de voltas que ele deu na pista, após 15 minutos. **6,3 voltas**

Resolução:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 500 \rightarrow C = 3140 \text{ m}$$

Como a velocidade é 80 km/h, em 15 minutos ele andou $\frac{80}{4} = 20 \text{ km} = 20000 \text{ m}$.

$$\text{número de voltas} = \frac{20000}{3140} = 6,3$$

Após 15 minutos, o piloto deu 6,3 voltas na pista.

7 Ana pretende colocar renda em todo o perímetro de uma toalha circular de raio 1 m. Quantos metros de renda ela deve comprar? **6,30 m**

Resolução:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \rightarrow C = 6,28 \text{ m}$$

Ela deve comprar 6,30 metros de renda.

- 8** Considerando o raio da Terra igual a 6370 km, qual a medida do comprimento da linha do equador?
aproximadamente 40 003,6 km

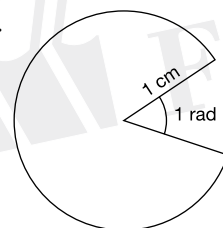
Resolução:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 6370 \rightarrow C = 40\,003,6 \text{ km}$$

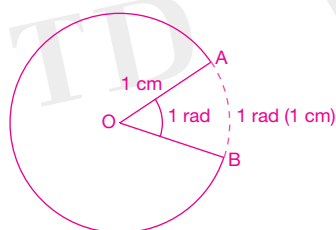
A linha do equador tem, aproximadamente, 40 003,6 km.

- 9** (Unesp-SP) Em um jogo eletrônico, o “monstro” tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura. A parte que falta no círculo é a boca do “monstro”, e o ângulo de abertura mede 1 rad. O perímetro do “monstro”, em centímetros, é:

- a) $\pi - 1$ c) $2\pi - 1$ **(e) $2\pi + 1$**
b) $\pi + 1$ d) 2π



Resolução:



O comprimento do arco menor $\widehat{AB}$ é 1 cm.

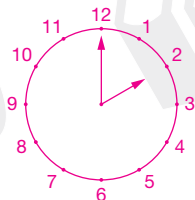
O perímetro do “monstro” é $p = 2\pi r - 1 + 1 + 1 = 2\pi + 1$.

10 Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que está assinalando:

- a) 2 h 60°
- b) 2h 15min $22^\circ 30'$
- c) 2h 50min 145°

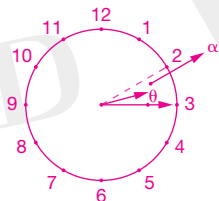
Resolução:

a) 2 h



Em $60'$ o ponteiro dos minutos percorre 360° , e o ponteiro das horas, 30° . Então, às 2 horas, o menor ângulo formado é $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

b) 2h 15min



Em $60'$ o ponteiro das horas percorre 30° ; em $15'$, percorrerá:

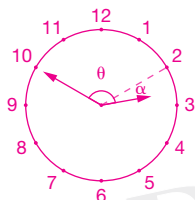
$$60' \text{ ————— } 30^\circ$$

$$15' \text{ ————— } \alpha$$

$$\alpha = \frac{15 \cdot 30}{60} \rightarrow \alpha = 7^\circ 30'$$

$$\theta = 30^\circ - \alpha = 30^\circ - 7^\circ 30' \rightarrow \theta = 22^\circ 30'$$

c) 2h 50min



Em $60'$ o ponteiro das horas percorre 30° ; em $50'$, percorrerá:

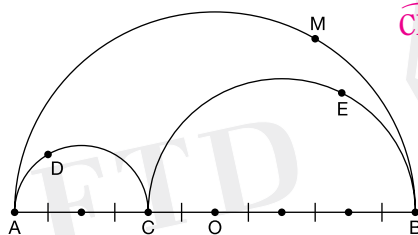
$$60' \text{ ————— } 30^\circ$$

$$50' \text{ ————— } \alpha$$

$$\alpha = \frac{50 \cdot 30}{60} \rightarrow \alpha = 25^\circ$$

$$\theta = 120^\circ + \alpha = 120^\circ + 25^\circ \rightarrow \theta = 145^\circ$$

11 Na figura abaixo, os arcos $\widehat{AMB}$, $\widehat{ADC}$ e $\widehat{CEB}$ têm, respectivamente, raios 30 cm, 10 cm e 20 cm. Determine os comprimentos desses arcos. O que podemos concluir? $\widehat{AMB} = 94,2 \text{ cm}$; $\widehat{ADC} = 31,4 \text{ cm}$ e $\widehat{CEB} = 62,8 \text{ cm}$



Resolução:

$$\text{arco } \widehat{AMB} = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 30}{2} = 94,2 \text{ cm}$$

$$\text{arco } \widehat{ADC} = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10}{2} = 31,4 \text{ cm}$$

$$\text{arco } \widehat{CEB} = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 20}{2} = 62,8 \text{ cm}$$

Podemos concluir que $\widehat{AMB} = \widehat{ADC} + \widehat{CEB}$.

12 Um grau (1 gr) é um ângulo central que determina na circunferência um arco de comprimento igual a $\frac{1}{400}$ da circunferência. Quantos radianos tem um ângulo de 50 gr? $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$

Resolução:

$$\begin{array}{l} 2\pi \text{ rad} \text{ ————— } 400 \text{ gr} \\ x \text{ ————— } 50 \text{ gr} \end{array}$$

$$x = \frac{50 \cdot 2\pi}{400} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

13 Um ciclista leva 5 minutos para dar uma volta numa pista circular de raio 150 m. Qual o comprimento da pista e qual a velocidade do ciclista em metros por minuto? 942 m e $v = 60\pi \text{ m/min}$

Resolução:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 150 \rightarrow C = 942 \text{ m}$$

$$v = \frac{s}{t} = 2\pi \cdot \frac{150}{5} \rightarrow v = 60\pi \text{ m/min}$$

14 Determine as medidas de x , em graus, associadas ao arco e a 45° , nas quatro primeiras voltas positivas. $45^\circ, 405^\circ, 765^\circ, 1125^\circ$

Resolução:

$$x_1 = 45^\circ$$

$$x_2 = 45^\circ + 360^\circ = 405^\circ$$

$$x_3 = 45^\circ + 720^\circ = 765^\circ$$

$$x_4 = 45^\circ + 1080^\circ = 1125^\circ$$

15 Determine as medidas de x , em radianos, associadas ao arco de $\frac{\pi}{8}$ nas três primeiras voltas negativas. $-\frac{\pi}{8}, -\frac{17\pi}{8}, -\frac{33\pi}{8}$

Resolução:

$$x_1 = -\frac{\pi}{8}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{8} - 2\pi = -\frac{17\pi}{8}$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{8} - 4\pi = -\frac{33\pi}{8}$$

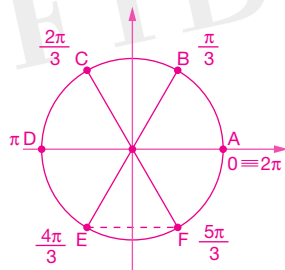
16 Construa um ciclo trigonométrico e marque os pontos correspondentes a:

$$0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{3} = \pi; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{6\pi}{3} = 2\pi.$$

a) Qual é o simétrico de $\frac{\pi}{3}$ em relação à origem? $\frac{4\pi}{3}$

b) Qual é o simétrico de $\frac{4\pi}{3}$ em relação ao eixo das ordenadas? $\frac{5\pi}{3}$

Resolução:



a) O simétrico de $\frac{\pi}{3}$ em relação à origem é $\frac{4\pi}{3}$.

b) O simétrico de $\frac{4\pi}{3}$ em relação ao eixo das ordenadas é $\frac{5\pi}{3}$.

17 Seja o arco de expressão geral: $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- a) Qual o valor da expressão para $k = 0$? $\alpha = \frac{\pi}{4}$ b) Qual o valor da expressão para $k = 7$? $\alpha = \frac{57\pi}{4}$

Resolução:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{a) } k = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{b) } k = 7 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 7 \cdot \pi = \frac{57\pi}{4}$$

18 a) Escreva em graus a expressão geral dos arcos de 20° . $\alpha = 20^\circ + 360^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$

- b) Qual é a imagem do arco se $k = -2$? $\alpha = -700^\circ$

Resolução:

$$\text{a) } \alpha = 20^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } \alpha = 20^\circ + 360^\circ \cdot (-2) = -700^\circ$$

19 Em que quadrante se encontra a extremidade dos arcos de:

- a) -1690° 2º quadrante

- b) 2490° 4º quadrante

- c) $\frac{323\pi}{8}$ 1º quadrante

Resolução:

$$\text{a) } -1690^\circ = (-4) \cdot 360^\circ - 250^\circ \rightarrow \text{a primeira determinação é igual a } -250^\circ, \text{ que se encontra no } 2^\circ \text{ quadrante.}$$

$$\text{b) } 2490^\circ = (6) \cdot 360^\circ + 330^\circ \rightarrow \text{a primeira determinação é igual a } 330^\circ, \text{ que se encontra no } 4^\circ \text{ quadrante.}$$

$$\text{c) } \frac{323\pi}{8} = (20) \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{8} \rightarrow \text{a primeira determinação é } \frac{3\pi}{8}, \text{ que se encontra no } 1^\circ \text{ quadrante.}$$

20 Descubra a primeira determinação positiva e escreva a expressão geral dos arcos congruentes ao arco de 2310° . $\alpha = 150^\circ$ e $\alpha = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

Resolução:

$$2310^\circ \overline{) 360^\circ}$$

$$150^\circ \quad 6$$

$$2310^\circ = (6) \cdot 360^\circ + 150^\circ$$

A primeira determinação é 150° .

$$\alpha = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

21 Determine o raio do círculo percorrido por um ponto, sabendo que em uma volta e meia percorreu uma distância de 9,420 km. **1 km**

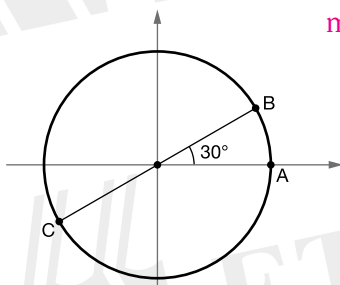
Resolução:

$$\text{uma volta e meia} = 2\pi r + \pi r = 3\pi r = 9420$$

$$r = \frac{9420}{3 \cdot 3,14} \rightarrow r = 1000 \text{ m} = 1 \text{ km}$$

22 Determine a medida dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$, em radianos, sabendo que estão orientados no sentido horário.

$$\text{med}(\widehat{AB}) = -\frac{11\pi}{6} \text{ e } \text{med}(\widehat{AC}) = -\frac{5\pi}{6}$$



Resolução:

$$\pi \text{ rad} \xrightarrow{\quad} 180^\circ$$

$$x \xrightarrow{\quad} 30^\circ$$

$$x = \frac{30\pi}{180} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

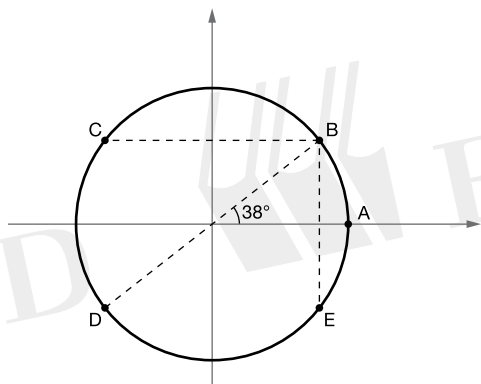
Observando o sentido horário dos arcos, temos:

$$\text{med}(\widehat{AB}) = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$$

$$\text{med}(\widehat{AC}) = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

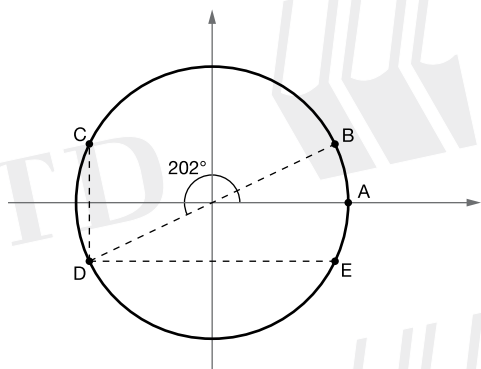
23 Nas figuras a seguir, determine em graus os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{AD}$ e $\widehat{AE}$.

a)



$$\begin{aligned}\text{med } (\widehat{AB}) &= 38^\circ \\ \text{med } (\widehat{AC}) &= 142^\circ \\ \text{med } (\widehat{AD}) &= 218^\circ \\ \text{med } (\widehat{AE}) &= 322^\circ\end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned}\text{med } (\widehat{AB}) &= 22^\circ \\ \text{med } (\widehat{AC}) &= 158^\circ \\ \text{med } (\widehat{AD}) &= 202^\circ \\ \text{med } (\widehat{AE}) &= 338^\circ\end{aligned}$$

Resolução:

a) $\text{med } (\widehat{AB}) = 38^\circ$

$$\text{med } (\widehat{AC}) = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$$

$$\text{med } (\widehat{AD}) = 180^\circ + 38^\circ = 218^\circ$$

$$\text{med } (\widehat{AE}) = 360^\circ - 38^\circ = 322^\circ$$

b) $\text{med } (\widehat{AB}) = 202^\circ - 180^\circ = 22^\circ$

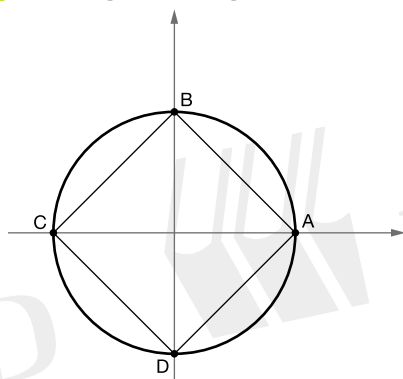
$$\text{med } (\widehat{AC}) = 180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$$

$$\text{med } (\widehat{AD}) = 180^\circ + 22^\circ = 202^\circ$$

$$\text{med } (\widehat{AE}) = 360^\circ - 22^\circ = 338^\circ$$

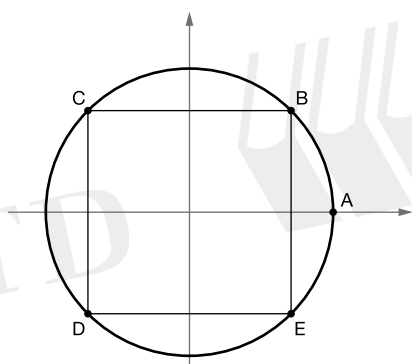
24 Os polígonos a seguir são quadrados. Determine em radianos os arcos correspondentes aos vértices.

a)



$$\begin{aligned}\text{med } (\widehat{AB}) &= \frac{\pi}{2} \\ \text{med } (\widehat{AC}) &= \pi \\ \text{med } (\widehat{AD}) &= \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned}\text{med } (\widehat{AB}) &= \frac{\pi}{4} \\ \text{med } (\widehat{AC}) &= \frac{3\pi}{4} \\ \text{med } (\widehat{AD}) &= \frac{5\pi}{4} \\ \text{med } (\widehat{AE}) &= \frac{7\pi}{4}\end{aligned}$$

Resolução:

a) $\widehat{AB}$ é um arco de 90° , equivalente a $\frac{\pi}{2}$ rad; então:

$$\text{med } (\widehat{AB}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{med } (\widehat{AC}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\text{med } (\widehat{AD}) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

b) BD e CE são diagonais do quadrado; portanto, o arco $\widehat{AB}$ mede 45° e os arcos $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ e $\widehat{DE}$ são arcos de 90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad. Assim:

$$\text{med } (\widehat{AB}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{med } (\widehat{AC}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{med } (\widehat{AD}) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

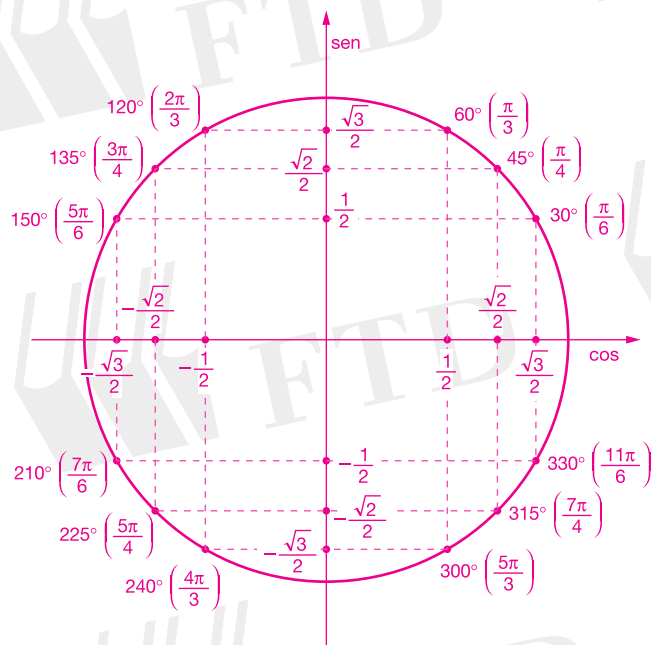
$$\text{med } (\widehat{AE}) = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$$

25 Associe os valores da segunda coluna aos valores dos senos da primeira coluna:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| a) $\sin 270^\circ$ | 1. 0 | a: 3, b: 4, c: 2, d: 5, e: 1, f: 6 |
| b) $\cos 315^\circ$ | 2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | |
| c) $\cos \frac{5\pi}{6}$ | 3. -1 | |
| d) $\sin \frac{7\pi}{6}$ | 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | |
| e) $\sin 2\pi$ | 5. $-\frac{1}{2}$ | |
| f) $\cos 4\pi$ | 6. 1 | |

Resolução:

Observando o ciclo trigonométrico abaixo com os ângulos e seus respectivos senos e cossenos, temos:



a) $\sin 270^\circ = -1$ (3)

b) $\cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (4)

c) $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2)

d) $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ (5)

e) $\sin 2\pi = 0$ (1)

f) $\cos 4\pi = \cos 2\pi = 1$ (6)

26 Determine os valores de:

a) $\sin \frac{19\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin 675^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin 5\pi = 0$

d) $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$

e) $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

f) $\cos 1305^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

h) $\cos 1000\pi = 1$

Resolução:

a) $\frac{19\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow \sin \frac{19\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $675^\circ = 360^\circ + 315^\circ \rightarrow \sin 675^\circ = \sin 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $5\pi = \pi + 4\pi \rightarrow \sin 5\pi = \sin \pi = 0$

d) $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$

e) $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

f) $1305^\circ = (3) \cdot 360^\circ + 225^\circ \rightarrow \cos 1305^\circ = \cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

h) $1000\pi = (500) \cdot 2\pi \rightarrow \cos 1000\pi = \cos 2\pi = 1$

27 Determine o valor da expressão: $A = \cos 10\pi + \sin \left(\frac{15\pi}{2}\right) - \sin \left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 1$

Resolução:

$10\pi = (5) \cdot 2\pi \rightarrow \cos 10\pi = \cos 2\pi = 1$

$\frac{15\pi}{2} = (3) \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} \rightarrow \sin \frac{15\pi}{2} = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

$\sin \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$A = \cos 10\pi + \sin \left(\frac{15\pi}{2}\right) - \sin \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1 + (-1) - 1 = -1$

28 Calcule $\sin(-60^\circ)$ e $\cos(-45^\circ)$. $\sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \rightarrow \sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \rightarrow \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \cos(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

29 Simplifique: $A = \sin(11\pi - x) + \cos(7\pi + x)$, para $x = \frac{\pi}{3}$. $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

Resolução:

$$11\pi = (5) \cdot 2\pi + \pi; 7\pi = (3) \cdot 2\pi + \pi; x = \frac{\pi}{3}$$

$$A = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow A = \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} \rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

30 Se $\alpha + \beta = 270^\circ$ e $\alpha - \beta = 210^\circ$, determine o valor de $\cos \alpha + \cos \beta$. $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

Resolução:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 270^\circ \\ \alpha - \beta = 210^\circ \end{cases}$$

$$2\alpha = 480^\circ \rightarrow \alpha = 240^\circ$$

Substituindo α , temos:

$$\alpha + \beta = 270^\circ \rightarrow 240^\circ + \beta = 270^\circ \rightarrow \beta = 30^\circ$$

$$\text{Então: } \cos 240^\circ + \cos 30^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

31 Se $\alpha = 1380^\circ$, determine o valor de $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

Resolução:

$$1380^\circ = (3) \cdot 360^\circ + 300^\circ$$

$$\sin 300^\circ \cdot \cos 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

32 Calcule o valor da expressão: $A = \frac{\sin 5x + \cos 10x}{\sin 9x}$, para $x = 30^\circ$. -1

Resolução:

$$A = \frac{\sin 5x + \cos 10x}{\sin 9x} = \frac{\sin 5 \cdot 30 + \cos 10 \cdot 30}{\sin 9 \cdot 30} \rightarrow$$

$$\rightarrow A = \frac{\sin 150^\circ + \cos 300^\circ}{\sin 270^\circ} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{-1} \rightarrow A = -1$$

33 Se $\sin \frac{5\pi}{18} = a$, qual o sinal de a ? Qual o valor do $\sin \frac{13\pi}{18}$ em função de a ? a é positivo e $\sin \frac{13\pi}{18} = a$.

Resolução:

$$\pi \text{ ————— } 180^\circ$$

$$\frac{5\pi}{18} \text{ ————— } x$$

$$\frac{\pi}{\frac{5\pi}{18}} = \frac{180}{x} \rightarrow x = \frac{180 \cdot \frac{5\pi}{18}}{\pi} \rightarrow x = 50^\circ$$

Portanto, é um ângulo do primeiro quadrante e seu seno é positivo.

Se $\frac{13\pi}{18} = \pi - \frac{5\pi}{18}$ e $\sin x = \sin(\pi - x)$, então:

$$\sin \frac{5\pi}{18} = \sin \left(\pi - \frac{5\pi}{18} \right) = \sin \frac{13\pi}{18} = a$$

Então, a é positivo e $\sin \frac{13\pi}{18} = a$.

34 Se $\sin x = \frac{1}{3}$, determine:

a) $\sin(\pi - x) = \frac{1}{3}$

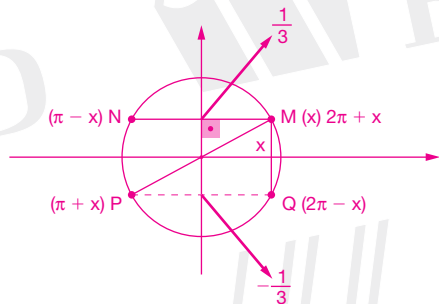
b) $\sin(\pi + x) = -\frac{1}{3}$

c) $\sin(2\pi - x) = -\frac{1}{3}$

d) $\sin(2\pi + x) = \frac{1}{3}$

Resolução:

Observando o ciclo trigonométrico abaixo, temos:



a) $\sin(\pi - x) = \frac{1}{3}$

b) $\sin(\pi + x) = -\frac{1}{3}$

c) $\sin(2\pi - x) = -\frac{1}{3}$

d) $\sin(2\pi + x) = \frac{1}{3}$

35 (Unesp-SP – modificado) Do solo, você observa um amigo numa roda-gigante. A altura em metros de seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão: $h(t) = 11,5 + 10 \sin \left[\frac{\pi}{12}(t - 26) \right]$, em que o tempo é dado em segundos e a medida angular em radianos. A que altura seu amigo se encontrava do solo quando a roda começou a girar ($t = 0$)? **6,5 m**

Resolução:

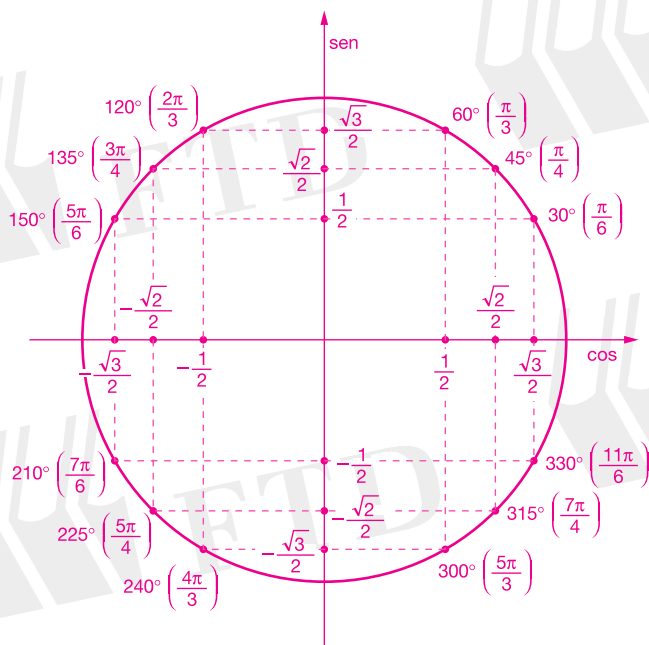
$$h(t) = 11,5 + 10 \sin \left[\frac{\pi}{12} \cdot (t - 26) \right]$$

$$h(0) = 11,5 + 10 \sin \left[\frac{\pi}{12} \cdot (0 - 26) \right] \rightarrow h(0) = 11,5 + 10 \sin \left[-\frac{13\pi}{6} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow h(0) = 11,5 + 10 \sin \left[-\frac{\pi}{6} \right] = 11,5 - 5 = 6,5 \text{ m}$$

36 Para que valores de x temos $\sin x = \cos x$, se $0^\circ \leq x < 360^\circ$? **45° e 225°**

Resolução:



Pelo ciclo trigonométrico, podemos concluir que $\sin x = \cos x$, para $x = 45^\circ$ e para $x = 225^\circ$.

37 O fenômeno da maré em determinado ponto da costa brasileira pode ser obtido pela expressão:

$P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t + \frac{5\pi}{4}\right)$, em que t é o tempo decorrido após o início da operação ($t = 0$), e $P(t)$ é a profundidade da água no instante t . Qual é a profundidade da água no início da operação? **9 m**

Resolução:

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) \rightarrow P(0) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0 + \frac{5\pi}{4}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow P(0) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow P(0) = 9,0$$

A profundidade da água no início da operação é 9 metros.

38 Construa o gráfico das funções a seguir, dando o domínio, a imagem e o período.

a) $y = 2 - \cos x$

b) $y = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

c) $y = \left| 3 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right|$

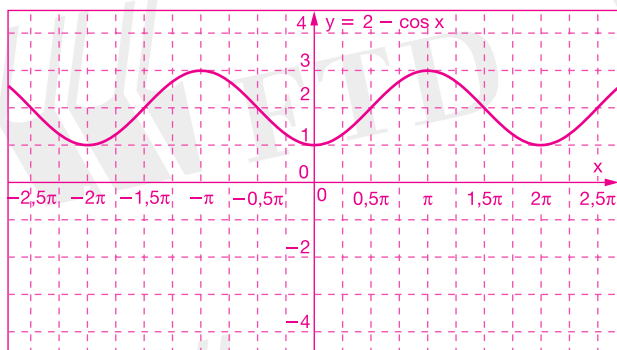
Resolução:

a) $y = 2 - \cos x$

Fazendo a tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

x	$\cos x$	$2 - \cos x$	
0	1	1	1º quadrante → crescente
$\frac{\pi}{2}$	0	2	
π	-1	3	2º quadrante → crescente
$\frac{3\pi}{2}$	0	2	3º quadrante → decrescente
2π	1	1	
			4º quadrante → decrescente

Esboçando o gráfico da função, temos:



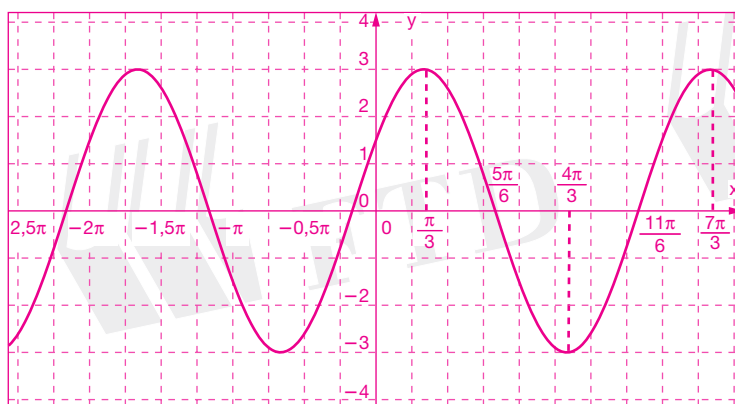
$$\begin{aligned} D &= \mathbb{R} \\ \text{Im}(f) &= [1, 3] \\ P &= 2\pi \end{aligned}$$

b) $y = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

Fazendo a tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

$x - \frac{\pi}{3}$	x	$\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$	$3 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$
0	$\frac{\pi}{3}$	1	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	0	0
π	$\frac{4\pi}{3}$	-1	-3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	0	0
2π	$\frac{7\pi}{3}$	1	3

Esboçando o gráfico da função, temos:



$$D = \mathbb{R}$$

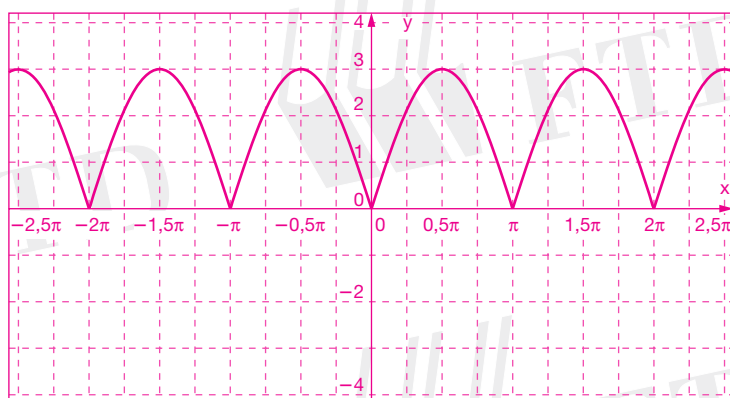
$$\text{Im}(f) = [-3, 3]$$

$$P = 7\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

c) $y = \left| 3 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right|$

Fazendo a tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

$x + \frac{\pi}{2}$	x	$\cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$	$3 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$	$\left 3 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right $
0	$-\frac{\pi}{2}$	1	3	3
$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	0
π	$\frac{\pi}{2}$	-1	-3	3
$\frac{3\pi}{2}$	π	0	0	0
2π	$\frac{3\pi}{2}$	1	3	3



$$D = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = [0, 3]$$

$$P = \pi$$

39 Determine o período da função: $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$. $p = 4\pi$

Resolução:

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$0 \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi \rightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \frac{x}{2} \leq 2\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{10\pi}{3}$$

$$p = \frac{10\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} \rightarrow p = 4\pi$$

40 Seja a função real $f(x) = 2 \cos ax$. Qual o valor de a para que o período dessa função seja 6π ? $a = \frac{1}{3}$

Resolução:

$$f(x) = 2 \cos ax$$

$$0 \leq ax \leq 2\pi \rightarrow 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a}$$

$$p = \frac{2\pi}{a} - 0 \rightarrow p = \frac{2\pi}{a}$$

$$p = 6\pi \rightarrow \frac{2\pi}{a} = 6\pi \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

41 (FGV-SP) Para que valores de m , a equação na incógnita x , $2 \sin x - 1 = 3m$, admite solução?

$$-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$$

Resolução:

$$2 \sin x - 1 = 3m$$

$$\sin x = \frac{3m + 1}{2}$$

Como $-1 \leq \sin x \leq 1$, então:

$$-1 \leq \frac{3m + 1}{2} \leq 1 \rightarrow -2 \leq 3m + 1 \leq 2 \rightarrow -3 \leq 3m \leq 1 \rightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{3}$$

42 Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = \frac{1}{1 - \sin x}$. Qual é o domínio da função no intervalo $[0, 2\pi]$?

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Resolução:

$$1 - \sin x \neq 0 \rightarrow \sin x \neq 1 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Então, } D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

43 Qual é a imagem da função $f(x) = -2 + 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$? $\text{Im} = [-5, 1]$

Resolução:

$$-1 \leq \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

$$-3 \leq 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 3$$

$$-2 - 3 \leq -2 + 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq -2 + 3$$

$$-5 \leq -2 + 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

$$\text{Im}(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq y \leq 1 \} = [-5, 1]$$

44 Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \cos x$. Considere as afirmações:

- I. $f(x)$ é uma função par.
- II. $f(x)$ é uma função periódica de período 2π .
- III. A imagem de $f(x) = [-1, 1]$.

Podemos afirmar que:

- a) I e II são verdadeiras, e III é falsa.
- b) I é falsa, e II e III são verdadeiras.
- c) I e III são verdadeiras, e II é falsa.
- d) todas são verdadeiras.
- e) todas são falsas.

Resolução:

I. (Verdadeira) $\rightarrow 2 \cos x = 2 \cos (-x)$; portanto, a função é par.

II. (Verdadeira) $\rightarrow 2 \cos x = 2 \cos (x + 2k\pi)$; então, $p = 2\pi$.

III. (Falsa) $\rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \rightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2 \rightarrow \text{Im}(f) = [-2, 2]$

45 O custo de x dezenas de certo produto é dado pela função: $C(x) = 3 - \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ em milhares de reais. Qual é o valor do custo mínimo desses produtos? Quantas dezenas podem ser fabricadas por esse custo? **2 000 reais; 1,5 dezena**

Resolução:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \leq 1$$

Portanto, o valor máximo de $\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ é 1, e o custo só será mínimo quando $\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ for máximo.

$$C(x) = 3 - \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

$C(x) = 3 - 1 = 2 \rightarrow$ o valor do custo mínimo é 2 000 reais.

$$2 = 3 - \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 1 \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \sin\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5$$

O custo mínimo desses produtos é R\$ 2 000,00 e pode ser fabricada 1,5 dezena por esse custo.

46 Se $\sin x > \sin y$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e ainda $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, podemos afirmar que:

a) $x = y$

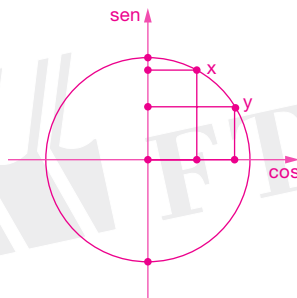
b) $x < y$

c) $\sin x < 0$

d) $\cos x < \cos y$

e) $\cos x, \sin y < 0$

Resolução:



No ciclo acima verificamos que se $\sin x > \sin y$, então: $x > y$ e $\cos y > \cos x$.

47 A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cos \frac{x}{3}$ é:

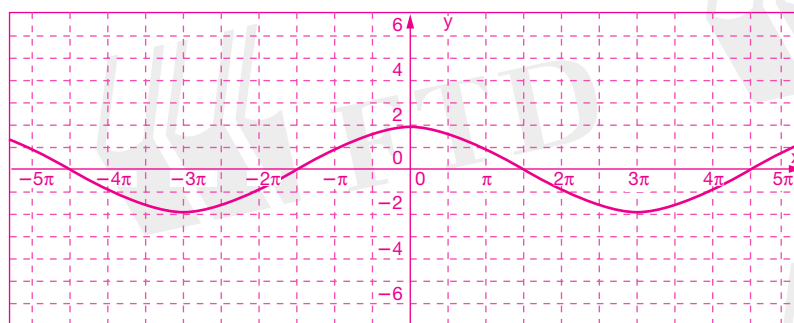
- a) decrescente para $0 \leq x \leq 3\pi$ c) decrescente para $0 \leq x \leq 6\pi$ e) crescente para $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 3\pi$
b) crescente para $0 \leq x \leq 3\pi$ d) crescente para $0 \leq x \leq 6\pi$

Resolução:

Fazendo a tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

$\frac{x}{3}$	x	$\cos \frac{x}{3}$	$2 \cos \frac{x}{3}$
0	0	1	2
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	0
π	3π	-1	-2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$	0	0
2π	6π	1	2

Esboçando o gráfico da função, temos:



Portanto, a resposta certa é a alternativa *a*, pois a função é decrescente para $0 \leq x \leq 3\pi$.

48 O valor máximo da função $f(x) = 3 \sin \frac{x}{2}$ é:

- a) 3
b) 2

- c) 1
d) -1

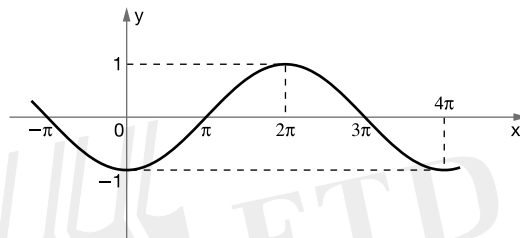
e) 0

Resolução:

$$-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1 \rightarrow -3 \leq 3 \sin \frac{x}{2} \leq 3$$

Portanto, o valor máximo é 3.

49 A figura a seguir representa o gráfico da função $y = a \cos bx$.



Os valores de a e b são, respectivamente:

- a) -1 e 2
b) -1 e 1

- c) -1 e $\frac{1}{2}$
d) 1 e 2

e) 1 e $\frac{1}{2}$

Resolução:

Observando o gráfico, temos:

$$\text{Se } bx = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Se } bx = 2\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{b}$$

$$p = \frac{2\pi}{b} - 0 = \frac{2\pi}{b} = 4\pi \rightarrow b = 2$$

Como a imagem da função é $[-1, 1]$, então $a = 1$.

50 (ITA-SP) Sejam f e g duas funções definidas por:

$$f(x) = (\sqrt{2})^{3 \sin x - 1} \quad \text{e} \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \sin^2 x - 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

A soma do valor mínimo de f com o valor mínimo de g é igual a:

- a) 0 c) $\frac{1}{4}$ e) 1
b) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

Resolução:

$$f(x) = (\sqrt{2})^{3 \sin x - 1}; g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \sin^2 x - 1}$$

f será mínimo se $\sin x = -1$, e g será mínimo se $\sin^2 x = 1$.

$$f_{\min} = (\sqrt{2})^{-3-1} = \frac{1}{4}$$

$$g_{\min} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \frac{1}{4}$$

$$f_{\min} + g_{\min} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

51 (FGV-SP) Considere a função $f(x) = 2 - \frac{3 \cos^2 x}{4}$. Os valores máximo e mínimo de $f(x)$ são, respectivamente:

- a) $1 e^{-1}$ c) $2 e^{-\frac{3}{4}}$ e) $2 e^{-\frac{5}{4}}$
b) $1 e^0$ d) $2 e^0$

Resolução:

$$f(x) = 2 - \frac{3 \cos^2 x}{4}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \rightarrow 0 \leq 3 \cos^2 x \leq 3 \rightarrow 0 \leq \frac{3}{4} \cos^2 x \leq \frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 \geq -\frac{3}{4} \cos^2 x \geq -\frac{3}{4} \rightarrow 2 \geq 2 - \frac{3}{4} \cos^2 x \geq 2 - \frac{3}{4} \rightarrow 2 \geq 2 - \frac{3}{4} \cos^2 x \geq \frac{5}{4}$$

Portanto, o valor máximo é 2, e o valor mínimo é $\frac{5}{4}$.

52 Determine os valores de:

a) $\operatorname{tg}(-420^\circ)$ $-\sqrt{3}$

b) $\operatorname{tg} 420^\circ$ $\sqrt{3}$

c) $\operatorname{tg} 4000\pi$ 0

d) $\operatorname{tg} 7001\pi$ 0

e) $\operatorname{tg} \frac{15\pi}{6}$ não existe

Resolução:

a) $\operatorname{tg}(-420^\circ) = \operatorname{tg}(-60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$
 $\operatorname{tg}(-420^\circ) = -\sqrt{3}$

b) $\operatorname{tg} 420^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ \rightarrow \operatorname{tg} 420^\circ = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{tg} 4000\pi = \operatorname{tg} 2\pi \rightarrow \operatorname{tg} 4000\pi = 0$

d) $\operatorname{tg} 7001\pi = \operatorname{tg} \pi \rightarrow \operatorname{tg} 7001\pi = 0$

e) $\operatorname{tg} \frac{15\pi}{6} = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ (não existe)

53 Dê o sinal dos números:

a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ positivo

b) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ positivo

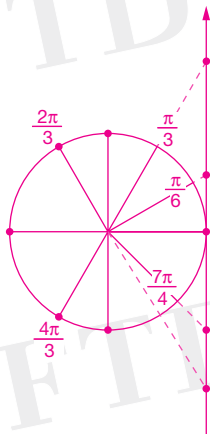
c) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$ negativo

d) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$ positivo

e) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$ negativo

Resolução:

Observe, no ciclo, os valores das tangentes dos referidos arcos:



Então:

a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} > 0 \rightarrow$ sinal positivo

b) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} > 0 \rightarrow$ sinal positivo

c) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} < 0 \rightarrow$ sinal negativo

d) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} > 0 \rightarrow$ sinal positivo

e) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} < 0 \rightarrow$ sinal negativo

54 Qual é o domínio da função $y = \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$? $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$$y = \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$3x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi \rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

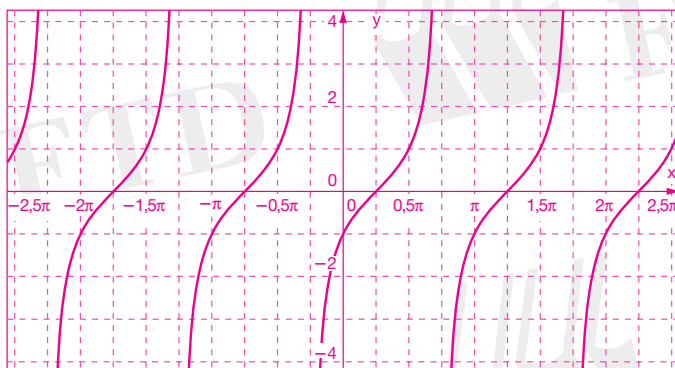
55 Esboce o gráfico e dê o domínio, a imagem e o período da função $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução:

Fazendo uma tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

$x - \frac{\pi}{4}$	x	$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	não existe
π	$\frac{5\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	não existe
2π	$\frac{9\pi}{4}$	0

Esboçando o gráfico da função, temos:



$$x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$$

$$p = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi$$

56 Se $\operatorname{tg} x = \frac{m+5}{m-3}$, para que valores de m existe essa função? $m \neq 3$

Resolução:

A única restrição para m , neste caso, é que o denominador seja diferente de zero; portanto, $m \neq 3$.

57 Determine $A = \sin(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x) + \operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}(\pi + x)$, para $x = \frac{\pi}{4}$.

Resolução:

$$A = \sin(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x) + \operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}(\pi + x); x = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$$

Então:

$$A = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{4}\right) + \left(-\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-1) \cdot (1) \rightarrow A = -\frac{1}{2} - 1 \rightarrow A = -\frac{3}{2}$$

58 Resolva as expressões:

a) $A = 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} 2\pi$

b) $B = \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{6} + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{3}$

Resolução:

a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$

$$A = 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} 2\pi \rightarrow A = 3 \cdot 1 + 0 \rightarrow A = 3$$

b) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$$B = \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{6} + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{3} \rightarrow B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 \rightarrow B = \frac{3}{9} + 3 \rightarrow B = \frac{10}{3}$$

59 Se $f(x) = \operatorname{tg} x$, para que valores de x , $x \in [0, 2\pi]$, temos $f(x) = 1$? $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Resolução:

Para $x \in [0, 2\pi]$, $\operatorname{tg} x = 1$; para $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

60 Qual o período da função real $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$? $\frac{\pi}{2}$

Resolução:

A função tg tem período π , então:

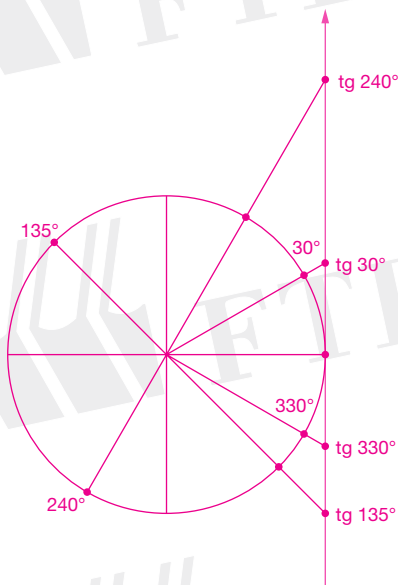
$$2x + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \text{ e } 2x + \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$p = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow p = \frac{\pi}{2}$$

61 Localize os arcos no ciclo trigonométrico e coloque-os em ordem crescente: $\operatorname{tg} 30^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$, $\operatorname{tg} 240^\circ$ e $\operatorname{tg} 330^\circ$. $\operatorname{tg} 135^\circ < \operatorname{tg} 330^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ < \operatorname{tg} 240^\circ$

Resolução:

Com os dados, temos:



Então, $\operatorname{tg} 135^\circ < \operatorname{tg} 330^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ < \operatorname{tg} 240^\circ$.

62 Resolva as equações no intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

a) $\sin x = 1$ $S = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

c) $\tan x = 1$ $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$

e) $\tan x = 0$ $S = \{0, \pi\}$

b) $\cos x = 0$

d) $\sin x = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

$S = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

Resolução:

a) $\sin x = 1$

$\sin x = \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \rightarrow S = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

b) $\cos x = 0$

$\cos x = \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou

$\cos x = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

c) $\tan x = 1$

$\tan x = \tan \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou

$\tan x = \left(\tan \frac{\pi}{4} + \pi \right) \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \rightarrow S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$

d) $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \sin \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$ ou

$\sin x = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{11\pi}{6} \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \rightarrow S = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

e) $\tan x = 0$

$\tan x = \tan 0 \rightarrow x = 0$ ou

$\tan x = \tan \pi \rightarrow x = \pi \rightarrow S = \{0, \pi\}$

63 Resolva as equações reais.

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) $\sin x = -4$ $S = \{ \}$

e) $\cos x = 3$ $S = \{ \}$

Resolução:

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin x = \sin \frac{4\pi}{3} \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{4\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

d) $\sin x = -4$; não existe x tal que $\sin x = -4$, pois $-1 \leq \sin x \leq 1$.

$$S = \{ \}$$

e) $\cos x = 3$; não existe x tal que $\cos x = 3$, pois $-1 \leq \cos x \leq 1$.

$$S = \{ \}$$

64 Resolva a equação em $\mathbb{R}$: $\frac{2}{\sqrt{3}} \cos x = -1$. $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Resolução:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cos x = -1 \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\therefore x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

65 Determine o conjunto verdade da equação $2 \sin^2 x = 1$, para $0 \leq x < 2\pi$. $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

Resolução:

$$2 \sin^2 x = 1; 0 \leq x < 2\pi$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Se } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Se } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{5\pi}{4} \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

66 Determine a soma das raízes da equação $\operatorname{tg}^2 x = 3$ no intervalo $0 \leq x < 2\pi$. 4π

Resolução:

$$\operatorname{tg}^2 x = 3; 0 \leq x < 2\pi$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 3 \rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3}$$

$$\text{Se } \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Se } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{soma} = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 4\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

67 Resolva a equação $2 \sin 2x = -1$ no conjunto dos números reais.

Resolução:

$$2 \sin 2x = -1$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \rightarrow \sin 2x = \sin \frac{7\pi}{6} \rightarrow 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ ou}$$

$$2x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

68 Resolva a equação $2 \cos 2x = 1$, no intervalo $0 \leq x \leq \pi$. $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

Resolução:

$$2 \cos 2x = 1; 0 \leq x \leq \pi$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \begin{cases} 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x' = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x'' = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

$$\therefore S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

69 Resolva a equação $\cos 4x = \cos 2x$, no intervalo $0 \leq x < 2\pi$. $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

Resolução:

$$\cos 4x = \cos 2x; 0 \leq x < 2\pi$$

$$4x = \pm 2x + 2k\pi$$

$$4x = 2x + 2k\pi \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x' = k\pi \begin{cases} k = 0 \rightarrow x = 0 \\ k = 1 \rightarrow x = \pi \\ k = 2 \rightarrow x = 2\pi \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$$4x = -2x + 2k\pi \rightarrow 6x = 2k\pi \rightarrow x'' = \frac{k\pi}{3} \begin{cases} k = 0 \rightarrow x = 0 \\ k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ k = 2 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \\ k = 3 \rightarrow x = \pi \\ k = 4 \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \\ k = 5 \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} \\ k = 6 \rightarrow x = 2\pi \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$$\therefore S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

70 Resolva a equação trigonométrica $(4 \sin^2 x - 2) \cdot (2 \cos x - 1) = 0$, no intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

$$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

Resolução:

$$\cos 4x = \cos 2x; 0 \leq x < 2\pi$$

$$(4 \sin^2 x - 2) \cdot (2 \cos x - 1) = 0, \text{ temos: } 4 \sin^2 x - 2 = 0 \text{ ou } 2 \cos x - 1 = 0.$$

$$\text{Se } 4 \sin^2 x - 2 = 0 \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}, \text{ e } \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}; x = \frac{3\pi}{4}; x = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4}.$$

$$\text{Se } 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2}; x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}.$$

$$\therefore S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

71 Resolva a equação $\sin x \cdot \cos x - \sin x - \cos x + 1 = 0$ em $\mathbb{R}$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Resolução:

$$\sin x \cdot \cos x - \sin x - \cos x + 1 = 0$$

$$\sin x \cdot (\cos x - 1) - (\cos x - 1) = 0$$

$$(\sin x - 1) \cdot (\cos x - 1) = 0 \rightarrow \sin x - 1 = 0 \text{ ou } \cos x - 1 = 0$$

$$\text{Se } \sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{Se } \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi$$

$$\therefore S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

72 Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $2 \sin^3 x - 7 \sin^2 x + 3 \sin x = 0$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Resolução:

$$2 \sin^3 x - 7 \sin^2 x + 3 \sin x = 0$$

$$\sin x \cdot (2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3) = 0 \begin{cases} \sin x = 0 \\ 2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\text{Se } \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$$

$$\text{Se } 2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \begin{cases} \sin x = 3 \text{ (não convém)} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + 2k\pi$$

$$\therefore S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

73 Calcule a soma das raízes da equação $\left(\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{3}\right) \cdot (\operatorname{sen} x - 1) = 0$ no intervalo $0 \leq x < 2\pi$. $\frac{9\pi}{2}$

Resolução:

$$\left(\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{3}\right) \cdot (\operatorname{sen} x - 1) = 0; 0 \leq x < 2\pi$$

$$\left(\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{3}\right) \cdot (\operatorname{sen} x - 1) = 0 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{3} = 0 \text{ ou } \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$\text{Se } \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

$$\text{Se } \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Então, as raízes são: $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{soma} = \frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$$

74 Resolva o sistema $\begin{cases} \cos(x + y) = -1 \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \cdot \left\{\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$

Resolução:

$$\begin{cases} \cos(x + y) = -1 \rightarrow \cos(x + y) = \cos \pi \rightarrow x + y = \pi \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = \pi \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2x & = & \frac{3\pi}{2} \end{matrix} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Substituindo x , temos:

$$\frac{3\pi}{4} + y = \pi \rightarrow y = -\frac{3\pi}{4} + \pi \rightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore S = \left\{\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

75 (Unesp-SP) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de Ciências Exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que era periódico e podia ser aproximado pela expressão:

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right),$$

em que t é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação ($t = 0$) e $P(t)$ é a profundidade da água (em metros) no instante t .

Resolva a equação $\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$, para $t > 0$. $S = \left\{t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{9}{2} + 12k, k \in \mathbb{N}\right\}$

Resolução:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) = 1; t > 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) = \cos 2\pi \rightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4} = 2\pi + 2k\pi$$

$$\frac{t}{6} + \frac{5}{4} = 2 + 2k \rightarrow \frac{2t + 15}{12} = \frac{12 \cdot (2 + 2k)}{12} \rightarrow 2t = 24 + 24k - 15 \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{9 + 24k}{2} \rightarrow t = \frac{9}{2} + 12k$$

$$S = \left\{t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{9}{2} + 12k, k \in \mathbb{N}\right\}$$

p. 37

76 Calcule $\cotg x$, $\sec x$ e $\operatorname{cosec} x$ para:

a) $x = \frac{\pi}{4}$ $1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$

b) $x = 150^\circ$ $-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2$

Resolução:

a) $x = \frac{\pi}{4}$

$$\cotg \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} \rightarrow \cotg x = 1$$

$$\sec \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \sec x = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \operatorname{cosec} x = \sqrt{2}$$

b) $x = 150^\circ$

$$\cotg 150^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 150^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \rightarrow \cotg 150^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 150^\circ = \frac{1}{\cos 150^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \sec 150^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} 150^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 150^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \rightarrow \operatorname{cosec} 150^\circ = 2$$

77 Seja $x = \frac{\pi}{6}$. Determine os valores de:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\sec x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$

f) $\operatorname{cosec} x = 2$

Resolução:

a) $x = \frac{\pi}{6}$

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

b) $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \rightarrow \operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$

e) $\sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \sec x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

f) $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \rightarrow \operatorname{cosec} x = 2$

78 Determine o domínio da função real: $y = \operatorname{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$y = \operatorname{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\therefore D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

79 Para que valores de x existe a função $y = \sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$?

Resolução:

$y = \sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

$3x - \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow 3x \neq \pi + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{3}(1 + k), k \in \mathbb{Z}$

A função existe para $x \neq \frac{\pi(1 + k)}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

80 Determine m para que a função $y = \cotg\left(mx + \frac{\pi}{4}\right)$ tenha período $\frac{\pi}{2}$. $m = 2$

Resolução:

$$mx + \frac{\pi}{4} = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4m}$$

$$mx + \frac{\pi}{4} = \pi \rightarrow x = \frac{3\pi}{4m}$$

$$p = \frac{3\pi}{4m} - \left(-\frac{\pi}{4m}\right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow m = 2$$

81 Determine m para que a função $y = \sec\left(mx - \frac{\pi}{2}\right)$ tenha período $\frac{2\pi}{3}$. $m = 3$

Resolução:

$$mx - \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2m}$$

$$mx - \frac{\pi}{2} = 2\pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{2m}$$

$$p = \frac{5\pi}{2m} - \frac{\pi}{2m} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow m = 3$$

82 Calcule m de modo que $\operatorname{cosec} \alpha = 2m + 7$ e $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. $m \leq -4$

Resolução:

Entre π e $\frac{3\pi}{2}$, a cossecante é menor ou igual a -1 , então:

$$2m + 7 \leq -1 \rightarrow m \leq -4$$

83 Qual o sinal de $f(x) = \sin x \cdot (-\sec x)$ no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$? **positivo**

Resolução:

$$f(x) = \sin x \cdot (-\sec x); \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

$$f(x) = \sin x \cdot \left(-\frac{1}{\cos x}\right) = -\operatorname{tg} x$$

A função tangente no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ é negativa; então, $f(x)$ é positiva.

84 Determine o sinal do produto: $A = \operatorname{tg} 122^\circ \cdot \sec 213^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 317^\circ$. **positivo**

Resolução:

$$\operatorname{tg} 122^\circ < 0$$

$$\sec 213^\circ = \frac{1}{\cos 213^\circ} < 0$$

$$\operatorname{cosec}^2 317^\circ > 0$$

$$A = \operatorname{tg} 122^\circ \cdot \sec 213^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 317^\circ > 0$$

Então, o sinal do produto é positivo.

85 Resolva a expressão: $A = 5 \operatorname{cosec}^2 \frac{17\pi}{4} \cdot \cotg \frac{21\pi}{4} - 4 \sec 10\pi \cdot \cotg^2 \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{26}{3}$

Resolução:

$$A = 5 \operatorname{cosec}^2 \frac{17\pi}{4} \cdot \cotg \frac{21\pi}{4} - 4 \sec 10\pi \cdot \cotg^2 \frac{2\pi}{3}$$

$$\operatorname{cosec} \frac{17\pi}{4} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \rightarrow \operatorname{cosec}^2 \frac{17\pi}{4} = 2$$

$$\cotg \frac{21\pi}{4} = \cotg \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sec 10\pi = \sec 2\pi = \frac{1}{\cos 2\pi} = 1$$

$$\cotg \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \cotg^2 \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}$$

$$A = 5 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 10 - \frac{4}{3} \rightarrow A = \frac{26}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\}$$

86 Considere a função $f(x) = x^3 - x \operatorname{cosec}^2 \alpha$. Resolva a equação $f(x) = 0$, para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Resolução:

$$f(x) = x^3 - x \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$x^3 - x \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{3} = 0$$

$$x \left(x^2 - \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{3} \right) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\}$$

87 Resolva a equação em $\mathbb{R}$: $\cotg x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Resolução:

$$\cotg x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

88 Resolva a equação $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi]$. $S = \{ \}$

Resolução:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = 2 \text{ (não existe } x \text{ que satisfaça essa condição)}$$

$$S = \{ \}$$

89 Resolva a equação $\sec^2 x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sec x = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$. $S = \left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$

Resolução:

$$\sec^2 x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sec x = 0$$

$$\sec x \left(\sec x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) = 0 \rightarrow \sec x = 0 \text{ (não existe) ou}$$

$$\sec x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow \frac{1}{\cos x} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore S = \left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$$

p. 40

90 Se $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{6}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine as demais funções trigonométricas.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{33}}{6}, \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{11}}{11}, \operatorname{cotg} x = -\sqrt{11}, \sec x = -\frac{2\sqrt{33}}{11}, \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{3}$$

Resolução:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{6} \rightarrow x \text{ pertence ao segundo quadrante.}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} \rightarrow \text{no segundo quadrante, } \cos x \text{ é negativo.}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{36}} \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{33}}{6}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{-\frac{\sqrt{33}}{6}} \rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{11}}{11}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \rightarrow \operatorname{cotg} x = -\sqrt{11}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = -\frac{6}{\sqrt{33}} \rightarrow \sec x = -\frac{2\sqrt{33}}{11}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{6}{\sqrt{3}} \rightarrow \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{3}$$

91 Sabendo que $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$, determine $A = \sin x \cdot \cos x$. $A = -\frac{12}{25}$

Resolução:

$\sin x + \cos x = \frac{1}{5} \rightarrow$ elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 + 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{25} \rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{25} - 1 = -\frac{24}{25}$$

$$A = \sin x \cdot \cos x = -\frac{12}{25}$$

$$\therefore A = -\frac{12}{25}$$

92 Se $\operatorname{tg} x = 4$, determine $y = \frac{1}{\cos^2 x}$. $y = 17$

Resolução:

$$y = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$$

Como $\operatorname{tg} x = 4$, $\operatorname{tg}^2 x = 16$. Então:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = 16 + 1 = 17$$

$$\therefore y = 17$$

93 Determine o valor da expressão: $A = (\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$. $A = 2$

Resolução:

$$A = (\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$$

$$A = \sin^2 x + \cancel{2 \sin x \cdot \cos x} + \cos^2 x + \sin^2 x - \cancel{2 \sin x \cdot \cos x} + \cos^2 x$$

Como $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, temos: $A = 2$.

94 Determine o valor numérico da expressão $y = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x}$ para $\cotg x = -\frac{7}{24}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. $y = \frac{25}{24}$

Resolução:

$$y = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} x \cdot \cotg x \cdot \operatorname{cosec} x = \cancel{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cancel{\operatorname{tg} x}} \cdot \operatorname{cosec} x$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cotg^2 x$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \left(-\frac{7}{24}\right)^2 = 1 + \frac{49}{576} = \frac{625}{576}$$

$$\operatorname{cosec} x = \pm \frac{25}{24} \rightarrow \text{no terceiro quadrante, a cosecante é positiva; logo, } y = \frac{25}{24}.$$

95 Dado $\sec x = 8$, determine o valor da expressão $y = 2 + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x$. $y = 10$

Resolução:

$$y = 2 + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x$$

$$y = 2 + \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \cos x = 2 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x = 2 + \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$$

$$y = 2 + \frac{1}{\cos x} = 2 + \sec x = 2 + 8 \rightarrow y = 10$$

96 (Fuvest-SP) A soma das raízes da equação $\sin^2 x - 2 \cos^4 x = 0$ que estão no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 2π

c) 4π

e) 7π

b) 3π

d) 6π

Resolução:

$$\sin^2 x - 2 \cos^4 x = 0$$

$$1 - \cos^2 x - 2 \cos^4 x = 0$$

Fazendo $\cos^2 x = y$, temos: $2y^2 + y - 1 = 0$.

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou}$$

$$\text{Se } \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{Se } \cos^2 x = -1 \rightarrow \text{não existe } x$$

$$\text{soma} = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 4\pi$$

97 Resolva a equação $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$ no intervalo $[\pi, 2\pi[$. $S = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

Resolução:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Se } \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}; \text{ então, não pertencem ao intervalo } [\pi, 2\pi[.$$

$$\text{Se } \sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6}; \text{ então, pertencem ao intervalo } [\pi, 2\pi[.$$

$$\text{Logo, } S = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

98 (Unemat-MT) Na expressão $\frac{\sec^2 x \cdot \cos x - \cotg x \cdot \sen x}{\operatorname{cosec}^2 x \cdot \sen x - \sec x \cdot \cotg x + \cotg x \cdot \cos x}$, podemos afirmar:

V 1. O numerador é igual a $\sen x \cdot \tg x$.

V 2. O denominador é igual a $\cos x \cdot \cotg x$.

F 3. Podemos dizer que $\frac{\sec^2 x \cdot \cos x - \cotg x \cdot \sen x}{\operatorname{cosec}^2 x \cdot \sen x - \sec x \cdot \cotg x + \cotg x \cdot \cos x} = \tg x$.

F 4. Se considerarmos $\sec x \cdot \cotg x + \cotg x \cdot \cos x$ isoladamente, então poderemos substituí-la por $\sen x$.

F 5. O numerador é igual ao denominador, portanto a expressão é igual a 1 (um).

Resolução:

$$\begin{aligned} \frac{\sec^2 x \cdot \cos x - \cotg x \cdot \sen x}{\operatorname{cosec}^2 x \cdot \sen x - \sec x \cdot \cotg x + \cotg x \cdot \cos x} &= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x - \frac{\cos x}{\sen x} \cdot \sen x}{\frac{1}{\sen^2 x} \cdot \sen x - \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sen x} + \frac{\cos x}{\sen x} \cdot \cos x} = \\ &= \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{\frac{\cos^2 x}{\sen x}} = \frac{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}}{\cotg x \cdot \cos x} = \frac{\sen x \cdot \tg x}{\cotg x \cdot \cos x} \end{aligned}$$

1. (Verdadeira)

2. (Verdadeira)

3. (Falsa); $\frac{\sen x \cdot \tg x}{\cotg x \cdot \cos x} = \frac{\frac{\sen^2 x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x}{\sen x}} = \frac{\sen^3 x}{\cos^3 x} = \tg^3 x$

4. (Falsa); $\sec x \cdot \cotg x + \cotg x \cdot \cos x = \cotg x \left(\frac{1}{\cos x} + \cos x \right) = \frac{\cos x}{\sen x} \left(\frac{1 + \sen^2 x}{\cos x} \right) = \frac{1 + \sen^2 x}{\sen x}$

5. (Falsa)

99 Para que valores de m $\sen x = \sqrt{m^2 + 2m + 1}$ e $\cos x = 1$? $m = -1$

Resolução:

Se $\cos x = 1$, $\sen x = 0$; então, $\sqrt{m^2 + 2m + 1} = 0 \rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \rightarrow (m + 1)^2 = 0 \rightarrow m = -1$

100 (Fuvest-SP) Se α está no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e satisfaz $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{4}$, então o valor da tangente de α é:

a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$

c) $\sqrt{\frac{3}{7}}$

e) $\sqrt{\frac{5}{7}}$

(b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

d) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

Resolução:

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4}$$

$$1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - 2 \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{8} \rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4} \rightarrow$$

cosseeno positivo, pois pertence ao primeiro quadrante.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$1 - \frac{6}{16} \rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4} \rightarrow \text{seno também positivo.}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

101 (UFAM) Associe as expressões equivalentes das duas colunas e assinale a alternativa correspondente à associação correta.

(A) $\frac{1}{\cos^2 x}$

(1) $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$

(B) $\sec x$

(2) $\text{tg}^2 x + 1$

(C) $\sec^2 x - 1$

(3) 1

(D) $\text{cosec}^2 x - \text{cotg}^2 x$

(4) $\text{tg}^2 x$

a) A2, B1, C3, D4

c) A2, B3, C4, D1

e) A2, B4, C1, D3

b) A3, B1, C4, D2

(d) A2, B1, C4, D3

Resolução:

$$(1) \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x \rightarrow (B)$$

$$(2) \text{tg}^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow (A)$$

$$(3) \text{cosec}^2 x - \text{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = 1 \rightarrow (D)$$

$$(4) \sec^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \text{tg}^2 x \rightarrow (C)$$