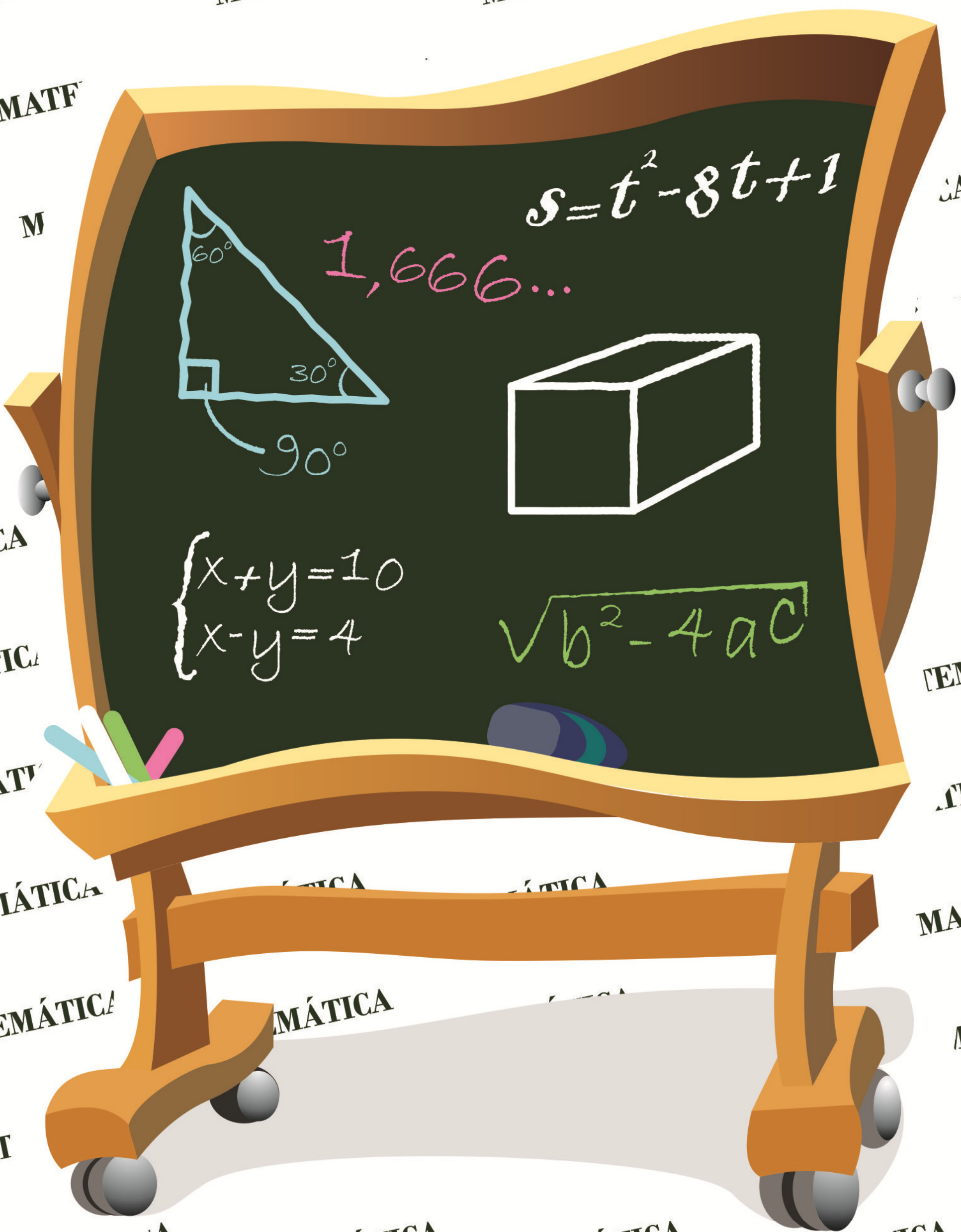
MATEMÁTICA



FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

ETEVM
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

GOVERNO DO Rio de Janeiro

1º ANO

2ª etapa

Trigonometria numa circunferência

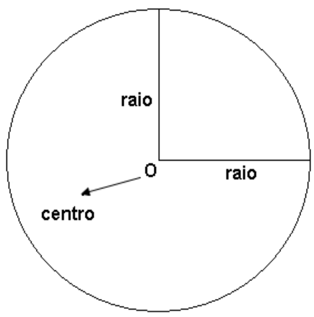
COORDENAÇÃO
SERGIO LOPES RODRIGUES

Trigonometria numa circunferência

A **Trigonometria** (trigono: triângulo e metria: medidas) é o estudo da Matemática que relação os lados e os ângulos de um triângulo.

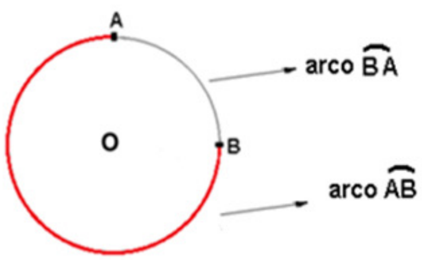
Segundo fontes históricas, tais estudos se iniciaram com os povos babilônicos e egípcios que aplicavam esses conhecimentos no desenvolvimento da agricultura. Porém, foram os gregos, árabes e indianos que desenvolveram e aperfeiçoaram a trigonometria, através de experiências em que se mediam distâncias inacessíveis, como, por exemplo, a distância entre o sol e a terra.Em destaque, temos o astrônomo grego Hiparco de Nicéia (190 a.C – 125 a.C), que introduziu a Trigonometria como uma ciência por meio de estudos relacionando os elementos do triângulo e o autor da primeira tábua trigonométrica entre 0º e 90º, no século II a.C. Mais tarde, através de Isaac Newton e Leibniz, a Trigonometria, definitivamente se encaixou na Matemática, e hoje em outras ciências, como Medicina, Engenharia, Física (ondulatória, óptica), Química, Geografia, Astronomia, Biologia, entre outras.

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância r de um ponto fixo denominado o centro da circunferência.



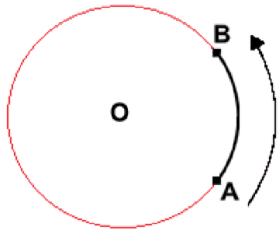
Arcos e ângulos

Considere uma circunferência de centro ***O*** e dois de seus pontos **A** e **B**, distintos. Chame-se **arco de circunferência** cada uma parte em que a circunferência foi dividia por A e B:

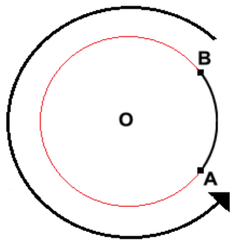


Vejam que A e B dividem a circunferência em duas partes, onde cada uma correspondem a uma arco. Então podemos notar que:

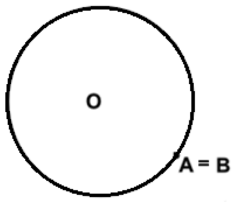
a) Partindo de A, temos o arco $\widehat{AB}$, de extremidades A e B no sentido Anti-horário.



b) Partindo de B temos o arco $\widehat{BA}$, de extremidades A e B no sentido horário.

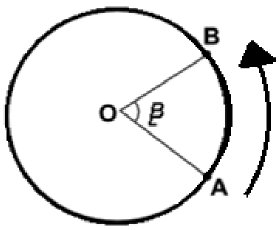


Quando o ponto A coincide com o ponto B, temos um arco nulo ou de uma volta:



Ângulo central

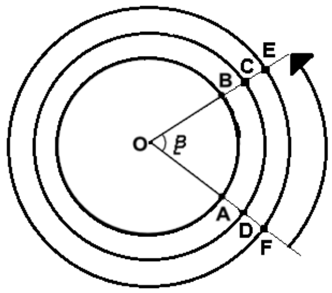
Considere uma circunferência de centro O e dois de seus pontos A e B. Unindo A e B até O, temos o ângulo, denominado ângulo central de vértice O cujos lados correspondem ao raio dessa circunferência.



Pela figura acima, podemos observar que a medida do arco $\widehat{AB}$ corresponde ao ângulo central $A\hat{O}B$ de medida β. Logo**, med ($A\hat{O}B$) = med($\widehat{AB}$).**

Exemplo, se **med($\widehat{AB}$) = 60º, então med ($A\hat{O}B$) = 60º.**

Por outro lado, devemos observar que a medida de um arco não representa a medida do seu comprimento. Vejamos:



Os arcos $\widehat{AB}$ **,** $\widehat{DC}$ **e** $\widehat{FE}$ possuem a mesma medida β, contudo não têm o mesmo comprimento. Assim, cada arco determina um ângulo e cada ângulo determina um arco.

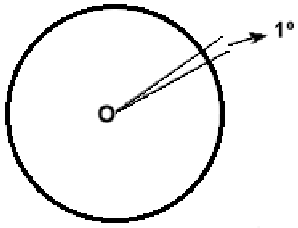
Unidades de medidas de arcos e ângulos

As unidades de medida mais utilizadas para determinar a medida de um arco de circunferência são o **grau** e o **radiano**.

GRAU

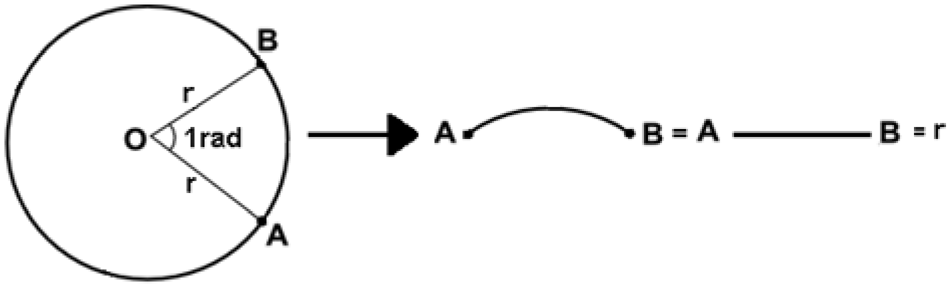
Um arco de **1grau (1º)** é definido como a medida do ângulo central que corresponde por um arco igual a **1/360** da circunferência que contém o arco.

Dessa forma se dividirmos a circunferência em 360 arcos congruentes (mesma medida), cada arco medirá 1º. É por este motivo que toda circunferência (ou arco de uma volta completa) **mede 360º**.



RADIANO

Um arco de **1 rad** (um radiano) é definido como a medida de um ângulo cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.



Exemplo: Se o arco de uma circunferência tiver 2 cm de comprimento e o raio 2 cm, então a medirá do arco, assim como do ângulo central correspondente medirá 1 radiano.

Seguindo o raciocínio anterior, como poderemos determinar a medida do arco de uma volta completa em radianos?

Solução:

Da geometria plana, o comprimento de uma circunferência ou de arco de uma volta completa é dado por: **C = 2.π.r,** onde r = raio da circunferência que o contém. Como o raio corresponde a 1 rad, então **C = 2. π.1rad = 2πrad,** isto é**,** uma **circunferência mede 2πrad.**

Assim**: 360º = 2πrad**

Conversões de medidas

Iremos agora estudar o procedimento para se converter uma medida em grau para radiano ou vice-versa.

Pelo estudo anterior, sabemos que um arco de uma volta mede **360º ou 2πrad**, isto é, **360º = 2πrad.** Agora, se dividirmos ambos os lados por 2, teremos que **180º = π rad.** Da mesma forma, se dividirmos ambos os lados por 2 teremos que **90º =** $\frac{\pi}{2}$ **rad.** Dando continuidade, dividindo ambos os lados por 2 teremos **45º =** $\frac{\pi}{4}$ **rad**.

Podemos montar uma tabela com estes valores:

Grau	**45º**	**90º**	**180º**	**360º**
Radiano	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	**πrad**	**2π rad**

Observação: Na trigonometria, iremos estudar arcos com medidas maiores que 1 volta completa (360º). Tais estudos se fazem necessário, principalmente em outras áreas, como a Física e a Engenharia. Assim, não iremos nos limitar apenas arcos com medidas até 360º. Por exemplo: 520º, 2356º, 9880º, etc.

Exercícios resolvidos:

1) Quanto mede em radianos 30º?

Solução:

Pela regra de três e utilizando o fato de que 180º = πrad:

grau **radiano**

30º _________ x

180º_________ πrad ⟶ 180º **.** x = 30º. πrad ⟶ x = $\frac{30\pi\text{rad}}{180} = \frac{\pi}{6}\text{rad}$

2) Quanto mede em radianos 270º?

Solução:

Pela regra de três:

grau **radiano**

270º _________ x

180º_________ πrad

180º**.** x = 270º.πrad

x = $\frac{270\pi\text{rad}}{180} = \frac{3\pi}{2}\text{rad}$

3) Quanto mede em radianos 300º?

Solução:

Pela regra de três:

grau **radiano**

300º _________ x

180º_________ πrad

180º. x = 300º. πrad

x = $\frac{300\pi \text{rad}}{180} = \frac{5\pi}{3}\text{rad}$

4) Quanto mede em graus o arco de $\frac{3\pi}{4}\text{rad}$?

Solução:

Pela regra de três:

grau **radiano**

x _____ $\frac{3\pi \text{rad}}{4}$

180º____ πrad

180º. $\frac{3\pi \text{rad}}{4}$ = x. πrad

$\frac{540\pi \text{rad}}{4}$ = x. πrad

4xπrad = 540πrad

x = $\frac{540\pi \text{rad}}{4\pi \text{rad}}$ = 135º

5) Quanto mede em graus o arco de $\frac{5\pi}{6}$ rad?

Solução:

Pela regra de três:

grau **radiano**

x _____ $\frac{5\pi rad}{6}$

180º___ πrad

$180º.\frac{5\pi rad}{6} = x.\pi rad \longrightarrow \frac{900\pi rad}{6} = x.\pi rad$

$6x\pi rad = 900\pi rad \longrightarrow x = \frac{900\pi rad}{6\pi rad} = 150º$

6) Quanto mede , aproximadamente, em graus , um arco de 1 rad?

Solução:

Pela regra de três:

grau **radiano**

x _____1 rad

180º___ πrad

$180º . 1rad = x.\pi rad \longrightarrow x = \frac{180º.1}{\pi} = \frac{180º}{3,14}$

180 | 3,14 ⟶ 180 00° | 314

-17898º   57º19`29”

102º = 102 . 60`

6120`

- 5966`

154` = 154 . 60”

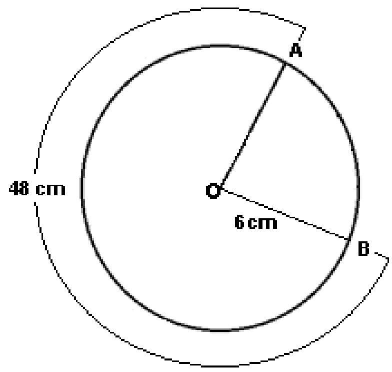
9240”

- 9106”

134”

Logo, x ≈ 57º 19`29”

7) Determinar a medida, em radianos, de um arco com 48cm de comprimento numa circunferência de 6 cm de raio.



Solução:

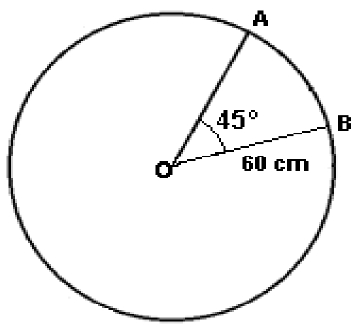
Se o comprimento do arco fosse igual ao raio (6 cm), a sua medida seria 1 rad. Com essa informação, podemos aplicar uma regra de três para obter o valor procurado.

Medida(rad)	**comprimento**
1 rad	6 cm
x	48 cm

$6 \cdot x = 48 \cdot 1 \longrightarrow x = \frac{48}{6} = 8 \text{ rad}$

Pelo resultado encontrado acima, concluir que para determinar a medida de um arco em radianos, cujo comprimento e o raio são conhecidos, basta dividir o comprimento pelo raio, isto é, Med = $\dfrac{\textbf{comprimento}}{\textbf{raio}}$**.**

8) Observando o exercício anterior, como poderemos encontrar o comprimento do arco $\widehat{\mathbf{AB}}$ de ângulo central 45º e raio 60 cm?



Solução:

Pelo exercício anterior, sabemos que: **Med =** $\dfrac{\textbf{comprimento}}{\textbf{raio}}$, onde a medida do arco

deve ser em radianos. Assim, basta transformar 45º que corresponde à medida do

arco em radianos e substituir o valor na relação: **Med =** $\dfrac{\textbf{comprimento}}{\textbf{raio}}$

Como 45º = $\frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}$ e r = 60 cm, substituindo, teremos:

$\frac{\pi}{4} = \frac{\textbf{comprimento}}{\textbf{60}} \Rightarrow$ comprimento = $\frac{60\pi}{4}$ = $15\boldsymbol{\pi}$ = 15 **.** 3,14 = 47,10 cm.

9) Expressar 37º30` em radianos

Solução:

Lembrando:

1º = 60`( sessenta minutos) e 1`(um minuto) = 60”(sessenta segundos).

Devemos transformar 37º 30` em minutos:

37º 30` = 37 **.** 60`+ 30` = 2220`+ 30`= 2250`

Transformando 180º em minutos:

180º = 180 . 60\` = 10 800\`

Aplicando uma regra de três:

grau **radiano**

37º30\` \_\_\_\_\_\_x → 2250\`________ x

180º ______ π rad 10 800\`______ πrad → 10 800x = 2250πrad →

$$x = \frac{2250\,\pi\,\text{rad}}{10\,800} = \frac{5\pi}{24}\text{rad}$$

10) Paulo em sua bicicleta dá 12 voltas em torno de uma pista circular de raio 30 metros. Quantos metros Paulo percorrerá? (Use: π = 3,14.)

Solução:

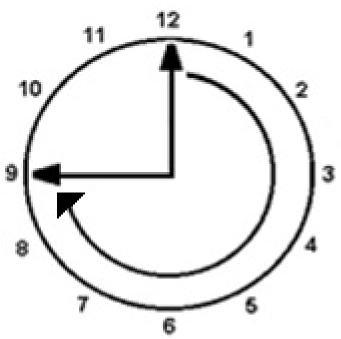
Primeiro iremos encontrar o percurso de uma volta completa na pista pela expressão: C = 2. π.r = 2 **.** 3,14 **.** 30 = 188,40 metros.

Em seguida, basta multiplicar este valor por 12.

Logo, Paulo percorrerá 12 **.** 188,40 = 2260,80 metros.

11) O ponteiro dos minutos de um relógio mede 15 cm. Determine a distância que sua extremidade deve percorrer em 45 minutos?

Solução:



Desejamos encontrar o comprimento do arco formado pelo ponteiro dos minutos durante 45 minutos.

Pelo **exercício 8,** sabemos que: **Comprimento = Medida do arco x raio.**

No exercício em questão, a circunferência é dividida em 12 partes de mesma medida ou 12 arcos de mesma medida. Assim, cada arco medirá $\frac{360^{o}}{12}$ = 30º.

Em 45 minutos temos 9 arcos de 30º, totalizando um arco de medida: **9 . 30º = 270º** que em radianos é igual a $\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}}\text{rad}$.

O raio corresponde ao ponteiro dos minutos possui 15 cm de comprimento.

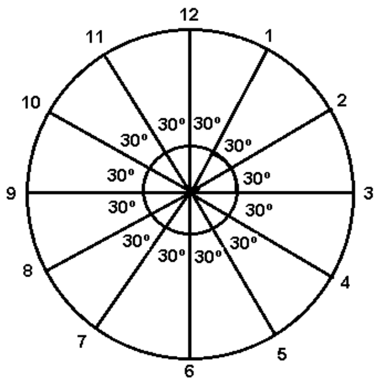
Logo, o comprimento procurado será: 15 **.** $\frac{3\boldsymbol{\pi}\text{rad}}{2} = \frac{45\pi}{2} = \frac{45\,.\,3{,}14}{2} = \frac{141{,}3}{2}$

= 70, 65 cm.

12) Qual é a medida do menor ângulo formado entre os ponteiros das horas e dos minutos de um relógio às 11h20mim?

Solução:

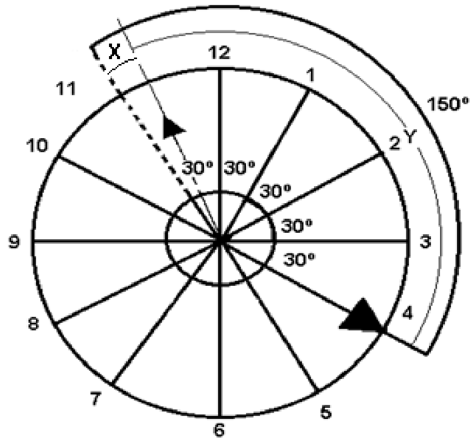
Sabemos que uma volta completa corresponde a 360º. Como o mostrador do relógio está dividido em 12 partes iguais, cada uma dessas partes medirá $\frac{360^{o}}{12}$ = 30º, conforme a figura abaixo:



Por outro lado, às 11h20min, o ponteiro dos minutos se encontra precisamente sobre o número 4 e o das horas entre 11 e 12, pois caso contrário, este estaria sobre o 11 e o menor ângulo seria 150º. Porém, houve um deslocamento (x) do ponteiro das horas. Desta forma devemos encontrar de quantos graus foi esse deslocamento (x).

Solução:

Chamaremos de y o deslocamento entre o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos. Assim: x + y = 150º. Vejamos na figura:



Pela regra de três, envolvendo o tempo e o deslocamento, determinaremos, em quantos graus o ponteiro das horas se deslocou no período de 20 minutos:

Tempo (minuto)	Deslocamento (grau)
60	30
20	x

$60x = 20 \,.\, 30 = 600 \longrightarrow x = \dfrac{600}{60} = 10°$

Como x + y = 150º, substituindo x = 10º, teremos y = 140º

Exercícios

1) Expresse em radianos:

a) 50º b)120º c)150º

d) 240º e)1950º f) 67º30`

2) Expresse em graus:

a) $\frac{10\pi}{9}$

b) $\frac{11\pi}{18}$

c) $\frac{3\pi}{5}$

d) $\frac{\pi}{9}$

e) $\frac{\pi}{20}$

f) $\frac{10\pi}{9}$

3) Uma pessoa caminha numa pista que possui forma de uma circunferência , percorrendo $\frac{1}{6}$ da mesma. Expresse esse percurso em graus e radianos.

4) Uma arco de 15 cm está contido numa circunferência de raio 3 cm. Quanto mede esse arco em radianos e o ângulo central a ele correspondente?

5) Um arco de 12 cm de comprimento está contido numa circunferência de raio 4 cm. Quanto mede, em graus, o ângulo central a ele correspondente?

6) Um carro de corrida deu 65 voltas em torno de uma pista circular de raio 20 metros. Qual a distância percorrida pelo carro?

7) As rodas de um caminhão têm 90 cm de raio. Como poderemos encontrar o número de voltas que as rodas desse caminhão deverá fazer para percorrer 7990 metros?

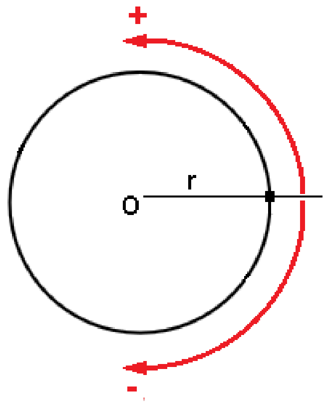
8) Uma circunferência de raio 6 cm possui um arco de ângulo central de 120º. Determine o comprimento desse arco.

9) Os ponteiros dos minutos de um relógio mede 20 cm. Encontre a distância que a sua extremidade percorre durante 45 minutos.

10) Encontre a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando são 11h 15 min.

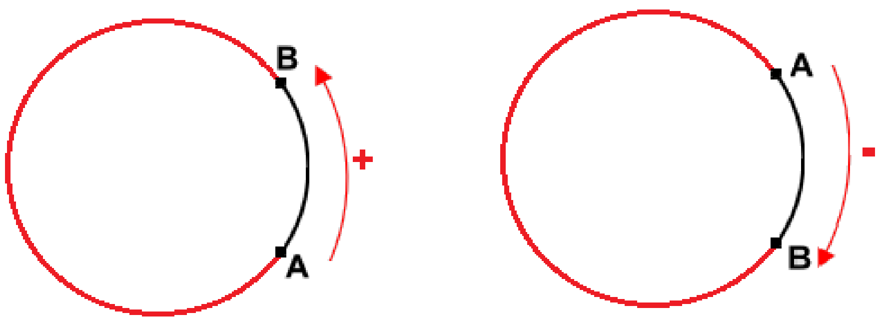
Circunferência orientada

Uma circunferência é dita orientada quando adotamos dois sentidos para as medidas de seus arcos: **Sentido positivo ou anti-horário e sentido negativo ou horário.**



Arco orientado

É todo arco de uma circunferência orientada.

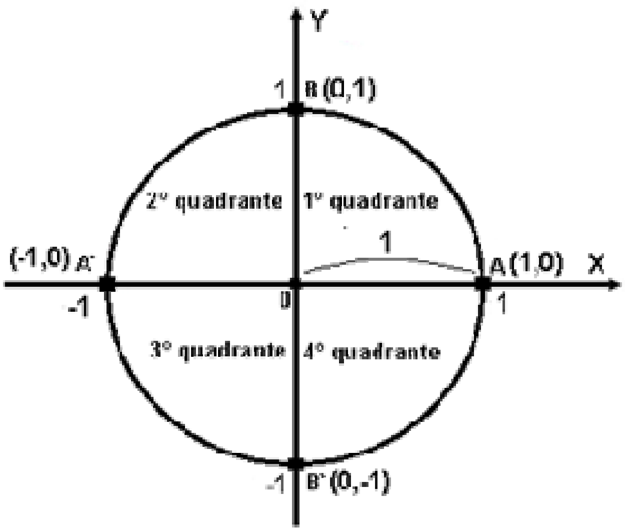


Arco $\widehat{\mathbf{AB}}$ **(+)** = arco de sentido positivo e Arco $\widehat{\mathbf{AB}}$ **(-)** = arco de sentido negativo.

Em cada arco orientado acima, A é a origem e B a extremidade.

Ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica

É toda circunferência orientada de raio **r = 1(unitário)**, centro **O(0,0)** na origem do sistema cartesiano ortogonal em que o sentido positivo é o anti-horário e o ponto **A(1,1)** que representa a origem dos arcos trigonométricos.



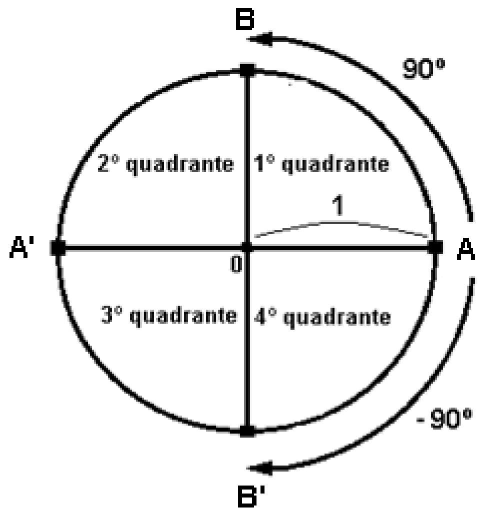
No ciclo trigonométrico, temos as seguintes observações:

a) As retas X e Y são os eixos coordenados que dividem a circunferência trigonométrica em quatro regiões, denominadas quadrantes.

b) Cada quadrante divide a circunferência em quatro arcos positivos de 90º e em quarto arcos negativos de - 90º, assim indicados:

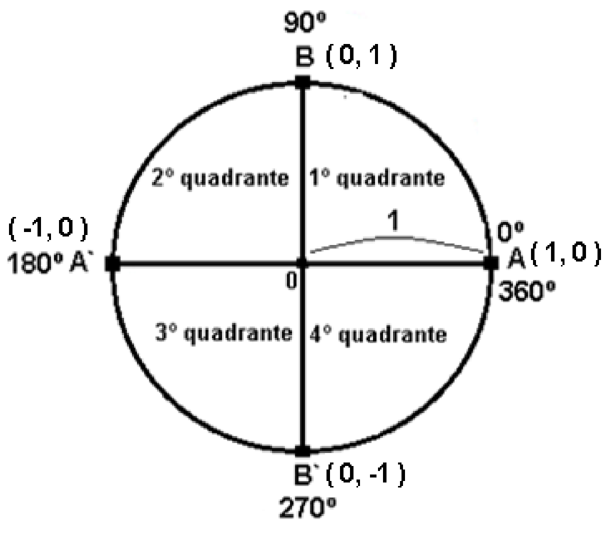
Positivos : $\widehat{\mathbf{AB}}$ = 90º**,** $\widehat{\mathbf{BA`}}$ = 90º**,** $\widehat{\mathbf{A`B`}}$ = 90º e $\widehat{\mathbf{B`A}}$ = 90º

Negativos: $\widehat{\mathbf{AB`}}$ = **-** 90º**,** $\widehat{\mathbf{B`A`}}$ = **-** 90º**,** $\widehat{\mathbf{A`B}}$ = **-** 90º e $\widehat{\mathbf{BA}}$ = **-** 90º

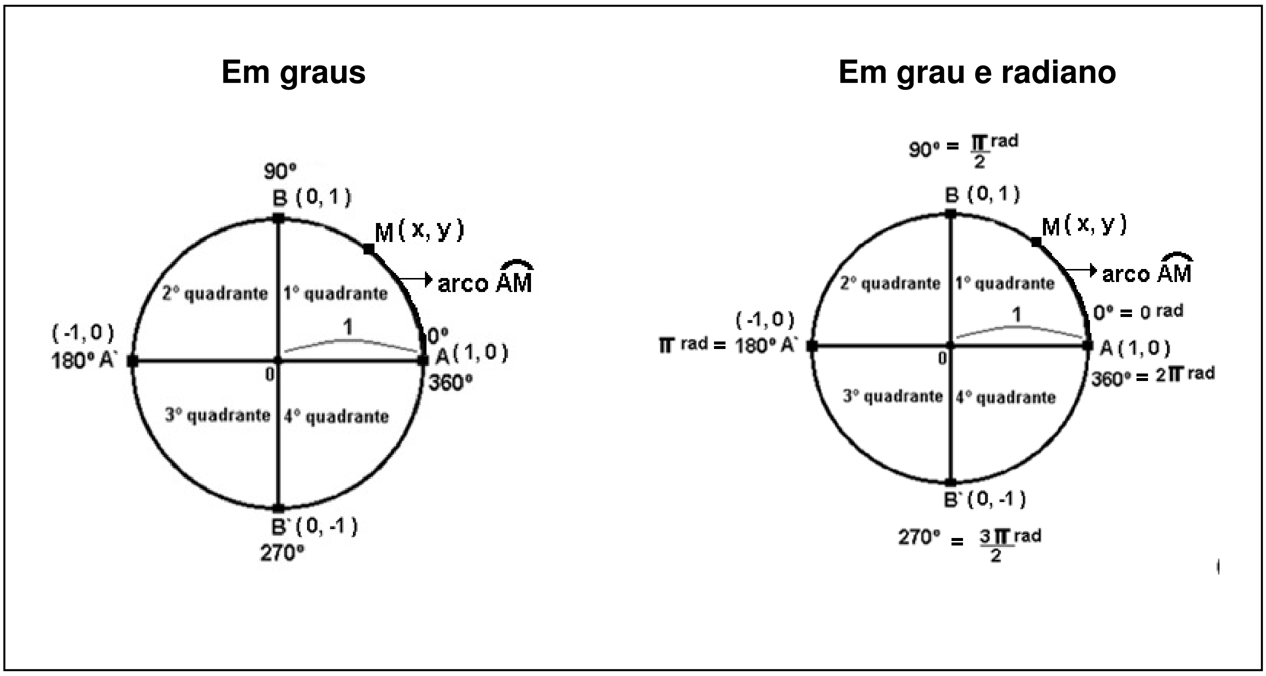


c) O 1º quadrante varia de 0º até 90º, o 2º quadrante de 90º até 180º, o 3º quadrante de 180º até 270º e o 4º quadrante de 270º até e 360º.

d) Cada extremidade dos arcos $\widehat{\mathbf{AB}}$ = 90º, $\widehat{\mathbf{BA`}}$ = 90º, $\widehat{\mathbf{A`B`}}$ = 90º e $\widehat{\mathbf{B`A}}$ = 90º corresponde a um par ordenado **(x, y),** inclusive as extremidades dos arcos entre os arcos em questão.



e) Para cada ponto **M** do ciclo trigonométrico, teremos um arco $\widehat{\mathbf{AM}}$ de origem em **A** e extremidade em **M**, onde **M** corresponde a um par ordenado.



Arcos côngruos ou congruentes

__Definição 1__: Dois arcos são côngruos ou congruentes quando possuem a mesma origem e a mesma extremidade, tendo apenas o número de voltas inteiras diferentes.

Para entender melhor esta definição, basta analisar cada arco no ciclo trigonométrico.

Notação: Para indicar que dois arcos são côngruos ou congruentes, utilizamos o da geometria plana o símbolo **≡**.

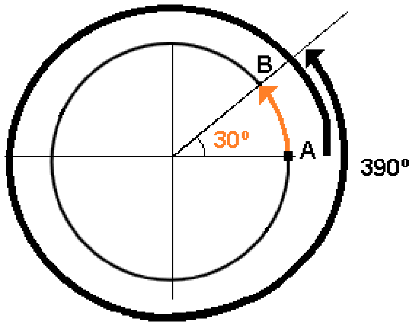
Exemplos:

a) Os arcos de 30º e 390º são congruentes ou côngruos?

Solução:

Primeiramente, notemos que o arco de **390º** é maior que uma volta **(360º)**, isto é, **390º** = **360º + 30º**. Assim o arco de **390º** parte do ponto A(origem dos arcos), percorrer **360º** (uma volta completa), mais **30º** no sentido anti-horário. Logo, pela **definição 1**, os arcos **390º** e **30º** são côngruos, pois possuem a **mesma origem e extremidade.** Em símbolo temos: **30º≡390º**

Geometricamente podemos verificar:



Poderíamos também, fazer o seguinte raciocínio:

390º | 360º ⟶ 390º = 360º + 30º = 360º x 1 + 30º

30º   1 ⟶ Número de voltas completas no sentido anti-horário.

⟶ Resto = arco a ser adicionado ao arco de 360º.

Pelo fato do resto ser um arco de **30º**, temos então que o arco de **390º** percorre uma volta completa **(360º)**, mais 30º, isto é, a sua extremidade é a mesma do arco de **30º**. Logo, 390º e 30º são côngruos ou congruentes.

<u>Observação:</u> Pelo que vimos anteriormente, para determinar o número de voltas completas, basta dividir o arco por 360º e verificar o valor do quociente, pois o mesmo representará tal número de voltas completas.

<u>Definição 2</u>: Dois arcos são côngruos ou congruentes quando a diferença entre eles é um múltiplo de **360º ou 2 πrad.**

Exemplo: Vamos verificar se os arcos de 30º e 390º são côngruos.

Solução:

Calculando a diferença 390º - 30º = 360º, temos que o resultado é múltiplo de 360º. Logo, os arcos são côngruos

Vimos pela **definição 2**, o resultado foi mais rápido.

Então, o aluno poderá aplicar a definição 1 ou 2, dependendo Ca cobrança de cada exercício.

b) Os arcos - 1130º e - 50º são côngruos?

Solução:

Notemos, primeiramente, que os arcos em questão são negativos(sentido horário). Em seguida, faremos o mesmo procedimento adotado ao arco de **390º**, isto é, dividimos **-1130º** por **360º**, onde teremos o seguinte resultado:

$$\begin{array}{r|l} -1130^\circ & 360^\circ \\ \hline -50^\circ & -3 \end{array}$$

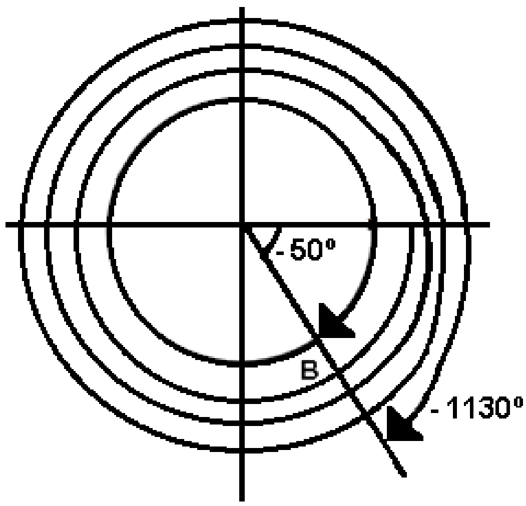
$360^\circ \longrightarrow -1130^\circ = 360^\circ \times (-3) - 50^\circ$

$-3 \longrightarrow$ Representa três voltas no sentido horário.

$-50^\circ \longrightarrow$ Resto = - 50º = arco a ser adicionado ao 360º x (- 3).

Como o resto da divisão coincide com o arco de **– 50º,** então **– 1130º** possui as mesmas extremidades que **– 50º**. Logo, são côngruos ou congruentes.

Geometricamente temos:



Aplicando a definição 2:

- 1130º - (- 50º) = -1130º + 50º = - 1080º = 360º **.** (- 3) = múltiplo de 360º. Logo, os arcos são côngruos.

Poderíamos também subtrais de outra forma: - 50º - (- 1130º) = -50º + 1130º = 1080º = 360º **.** 3.

c) - 60º e 300º são côngruos?

Aplicando a **definição 2,** temos: 300º - (- 60º) = 300º + 60º = 360º. Logo os arcos são côngruos.

d) Os arcos $\frac{3\pi}{8}$ e $\frac{35\pi}{8}$ são côngruos?

Aplicando a **definição 2** : $\frac{35\pi}{8}$ - $\frac{3\pi}{8}$ = $\frac{35\pi-3\pi}{8}$ = $\frac{32\pi}{8}$ = 4 π = 2 **.** 2 π. Logo, os arcos são côngruos.

e) Os arcos $\frac{14\pi}{3}$ e $\frac{19\pi}{3}$ são arcos côngruos?

Aplicando a **definição 2**: $\frac{19\pi}{3}$ - $\frac{14\pi}{3}$ = $\frac{19\pi-14\pi}{3}$ = $\frac{5\pi}{8}$ = $\frac{5.180°}{8}$ = $\frac{900°}{8}$ = 112,5º

que não é múltiplo de 360º. Logo, os arcos não são côngruos.

Observe que para facilitar os cálculos passamos de radianos para graus.

Podemos concluir que para verificar se dois arcos (positivos ou negativos, ou um positivo e outro negativo) são congruentes, devemos utilizar o caminho mais fácil para se chegar ao resultado esperado.

Expressão geral dos arcos côngruos a um arco dado

Considere os seguintes arcos: 55º, 415º, 775º e - 305º.

Podemos verificar os seguintes resultados envolvendo-os:

1º) Dividindo 415º por 360º, teremos:

$$\begin{array}{r|l} 415º & 360º \\ \hline 55º & 1 \end{array}$$

1 $\longrightarrow$ 415º = 360º x 1+ 55º $\longrightarrow$ 1 volta positiva completa.

$\longrightarrow$ 55º = resto a ser adicionado ao arco de 360º

Pelos exemplos anteriores, concluímos que: **415º ≡ 55º.**

2º) Dividindo 775º por 360º, teremos:

775º | 360º

55º 2 ⟶ 775º = 360º x 2 + 55º ⟶ 2 voltas positivas completas.

55º = resta a ser adicionado ao arco de (360º x 2).

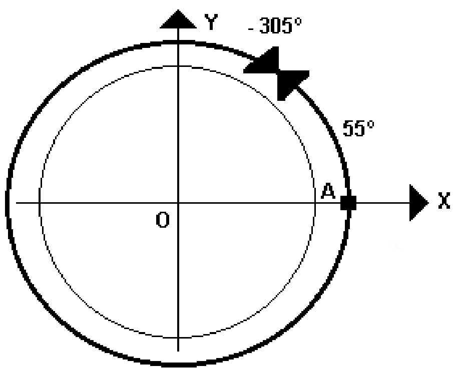
Então: **775º ≡ 55º.**

3º) Como **- 305º** é inferior a uma volta negativa completa,então iremos representá-lo da seguinte maneira:

- 305º = - 360º + 55º = 360º **.** (-1) + 55º.

Assim: **- 305º percorre uma volta completa no sentido negativo(horário)** e depois, muda de sentido, percorrendo 55º no sentido positivo, tendo assim as mesmas extremidades que **55º**. Logo, **– 305º ≡ 55º.**

No exemplo anterior, podemos notar geometricamente que – 305º e 55º partem da origem dos arcos(ponto A) e percorrem sentidos contrários até se encontrarem no 1º quadrante. Vejamos:



Reunindo os resultados acima, temos que: - 305º ≡ 775º ≡ 415º ≡ 55º, isto é, os arcos são côngruos.

Ainda no exemplo acima, notemos que todos os arcos possuem **55º** em sua estrutura . Logo, podemos escrevê-los de maneira única, todos os arcos através de uma expressão matemática em função do arco de **55º**, que denominamos **expressão geral dos arcos côngruos a um arco conhecido a ser definida:**

Considere o arco X_o em graus, onde $0^{\circ} \leq X_o \leq 360^{\circ}$. Podemos expressar todos os arcos côngruos a X_o através da expressão $\mathbf{X = X_o + 360^{\circ}. k}$, $\mathbf{k \in Z}$ chamada **expressão geral dos arcos côngruos a** X_o, onde **k** representa o número de voltas e X_o a **1ª determinação positiva** ou a **1ª volta positiva.**

Caso a medida do arco seja dada em radianos, representamos a expressão geral por: $\mathbf{X = X_o + 2\pi. k}$, $\mathbf{k \in Z}$.

Exemplos:

a) Como podemos determinar todos os arcos côngruos a 55º pela expressão $\mathbf{X = X_o + 2\,\pi. K}$.?

Solução:

Trocando X_o por **55º** na expressão **X = 55º + 360º. K e k por números naturais convenientes:**

K = 0 $\longrightarrow$ X = 55º **+ 360º. 0 = 55º + 0 = 55º (1ª determinação positiva ou 1ª volta positiva ou 1ª determinação principal).**

K = 1 $\longrightarrow$ X = 55º + 360º . 1 = 55º + 360º = **415º (2ª determinação positiva ou 2ª volta positiva).**

K = 2 $\longrightarrow$ X = 55º **+ 360º. 2 = 55º + 720º = 775º (3ª determinação positiva ou 3ª volta positiva).**

K = -1 $\longrightarrow$ X = 55º **+ 360º. (-1) = 55º - 360º = 55º - 360º = - 305º (1ª determinação negativa ou 1ª volta negativa).**

Notemos que a soma da 1ª determinação positiva com o módulo da 1ª determinação negativa é igual a 360º, isto é, **55º +** $|-305^{\circ}|$ **= 55º + 305º = 360º**. Então, para encontrar a **1ª determinação negativa** a partir da **1ª determinação positiva**, basta subtrair 360º da 1ª determinação positiva, isto é, **55º - 360º = - 305º.**

b) Vamos encontrar a 1ª determinação positiva e escrever a expressão geral dos arcos côngruos a 1960º

Solução:

Como o arco de 1960º é maior que 360°, devemos dividi-lo por 360º para determinar o número de voltas completas e o acréscimo para completar 1960º.

$$\begin{array}{r|l} 1960^{\circ} & 360^{\circ} \\ \hline 160^{\circ} & 5 \end{array}$$

Assim, 1960º = 360º **.** 3 + 160º, ou seja, o arco de 1960º tem três voltas completas mais 160º. Desconsiderando as voltas completas, temos que **160º** é a 1ª determinação positiva.

A expressão geral dos arcos côngruos a 1960º é: **X = 160º + 360ºK, k Є Z.**

c) Encontrar a 1ª determinação positiva e escrever a expressão geral dos arcos côngruos a **- 2740º**.

Solução:

Dividindo - 2740º por 360º, iremos determinar o número de voltas completas e o acréscimo para completar - 2720º

$$\begin{array}{r|l} -2740^{\circ} & 360^{\circ} \\ \hline -220^{\circ} & -7 \end{array}$$

Assim, - 2740º = 360º x (- 7) - 220º, onde - 220º é a 1ª determinação negativa. Para calcular a 1ª determinação positiva, basta somar 360º a - 220º, isto é, - 220º + 360º = **140º.**

A expressão geral dos arcos côngruos a – 2740º é: **X = 140º + 360ºK, k Є Z.**

d) Encontrar a 1ª determinação positiva e escrever a expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{15\pi}{4}$.

Passando $\frac{15\pi}{4}$ para radianos, temos $\frac{15\pi}{4} = \frac{15.180^{\circ}}{4} = \frac{2700^{\circ}}{4} = 675^{\circ}$.

Como 675º é maior que 360º, devemos dividir 675º por 360º:

$$\begin{array}{r|l} 675^{\circ} & 360^{\circ} \\ \hline \end{array}$$

315º $\quad$ 1 $\longrightarrow$ 315º é a 1ª determinação positiva de $\frac{15\pi}{4}$

Finalmente passando 315º para radianos, 315º = $\frac{7\pi}{4}$.

A expressão geral será: $x = \frac{7\pi}{4} + \mathbf{2\,\pi.\,k,\ k \in Z}$.

Exercícios

1) Uma pessoa percorre um arco de 1990º, partindo do ponto A(origem dos arcos).Pergunta-se:

a) Quantas voltas completas essa pessoa percorre?

b) Qual é a 1ª volta positiva para esse percurso?

c) Qual é a 1ª volta negativa?

d) Qual é a expressão geral dos arcos côngruos ao arco de 1990º?

2) Encontre o quadrante de localização da extremidade de cada arco e o número de voltas completas e a 1ª determinação positiva de cada arco:

a) – 1640º

b) 2640º

c) $-\frac{78\pi}{4}$

d) $\frac{35\pi}{8}$

3) Verifique se os seguintes arcos são côngruos:

a) 1590º e - 930º

b) $\frac{14\pi}{3}$ e $\frac{18\pi}{3}$

c) 2680º e 1960º

4) Considere a expressão geral dos arcos côngruos ao arco de 40º. Determine:

a) 2ª determinação positiva;

b) 3ª determinação negativa.

5) Considere o arco de 50º. Determine todas as medidas x dos arcos côngruos ao arco de 50º que estão nos intervalos:

a) 0º ≤ x ≤ 1080º

b) -720º ≤ x ≤ 0º

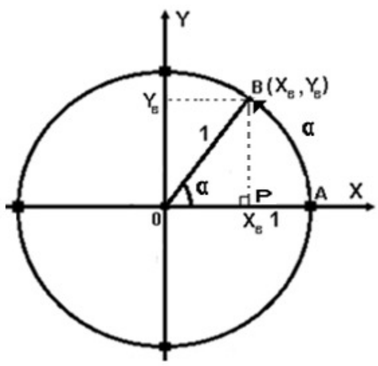
6) Um carro percorreu $\frac{85}{6}$ de volta numa pista circular. Determine:

a) O ângulo que representa toda a trajetória percorrida pelo carro;

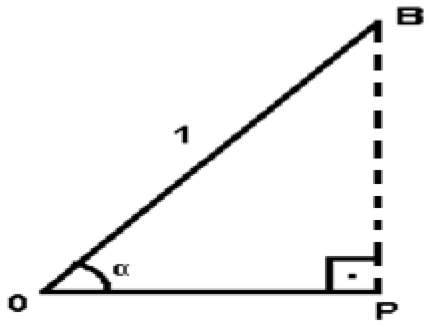
b) Em graus a menor volta positiva e a menor negativa nesse trajeto.

Seno e cosseno

Considere uma circunferência trigonométrica e um arco $\widehat{\mathbf{AB}}$ de medida α, tal que 0º < α < 90º, na qual a extremidade B é um ponto de coordenadas X_B e Y_B .



Observando o triângulo retângulo ∆**OPB**, retângulo em P, temos as seguintes relações trigonométricas:

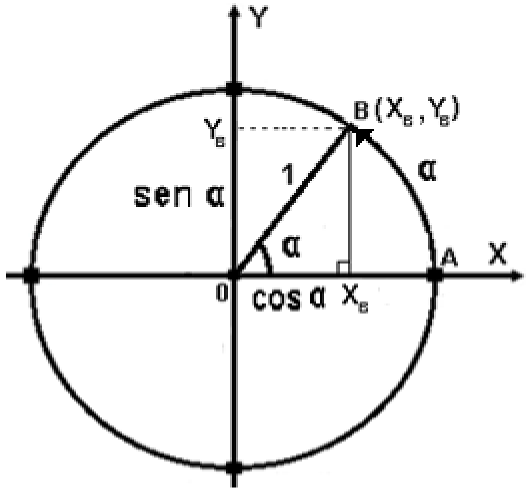


$$\text{sen}\,\alpha = \frac{BP}{1} = BP$$

$$\cos\alpha = \frac{0P}{1} = 0P$$

Onde que $\overline{\mathbf{BP}}$ e $\overline{\mathbf{0P}}$ são, respectivamente, a ordenada e abscissa do ponto **B**, isto é, **BP = Y_B** e **0P = X_B**. Assim, o **seno** de **α** e o **cosseno** de **α** são, respectivamente, a **ordenada** e a **abscissa** de **B**. Logo, o ponto **B** será representado da seguinte forma: **B (cos α, sen α).** Assim, verificamos que o eixo dos **Y** é o eixo dos senos e o eixo dos **X** o do cosseno.

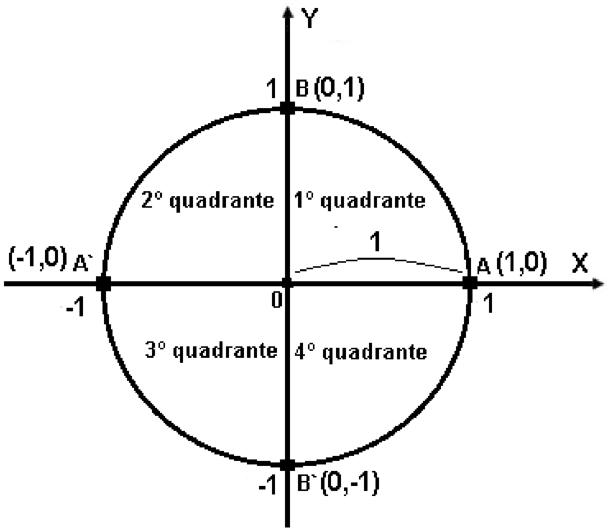
Na figura abaixo temos tal situação:



$\text{sen}\,\alpha = Y_B$ = Ordenada de B

$\cos\alpha = X_B$ = Abscissa de B

Vejamos uma aplicação relacionando aos arcos de 0º, 90º, 180º, 270º e 360º.



Para o arco de 0º temos associado o par ordenado (1,0), onde sen 0º = 0 e cos 0º = 1.

Para o arco de 90º temos associado o par ordenado (0, 1), onde seno 90º = 1 e cosseno 90º = 0.
Para o arco de 180º temos associado o par ordenado (-1, 0), onde seno 180º = 0 e cosseno 180º = -1.
Para o arco de 90º temos associado o par ordenado (0, 1), onde seno 90º = 1 e cosseno 90º = 0.

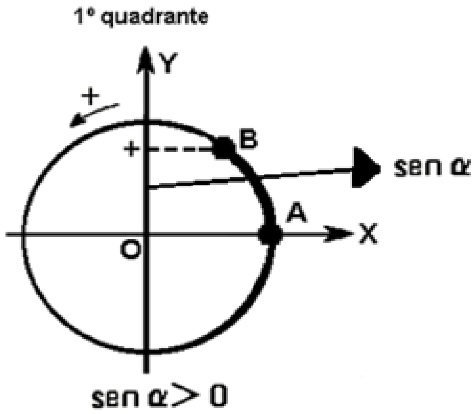
Vejamos numa tabela:

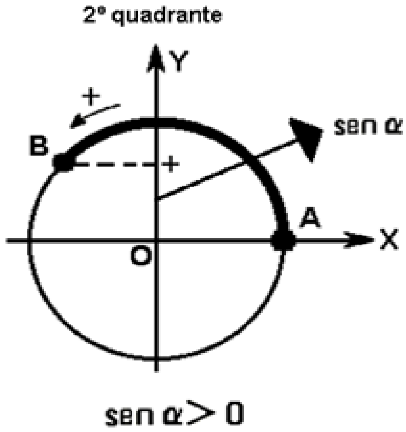
α	0º	90º	180º	270º	360º
α	0 rad	$\frac{\pi}{2}\text{rad}$	πrad	$\frac{3\pi}{2}\text{rad}$	$2\pi\text{rad}$
sen α	0	1	0	-1	0
cos α	1	0	-1	0	1

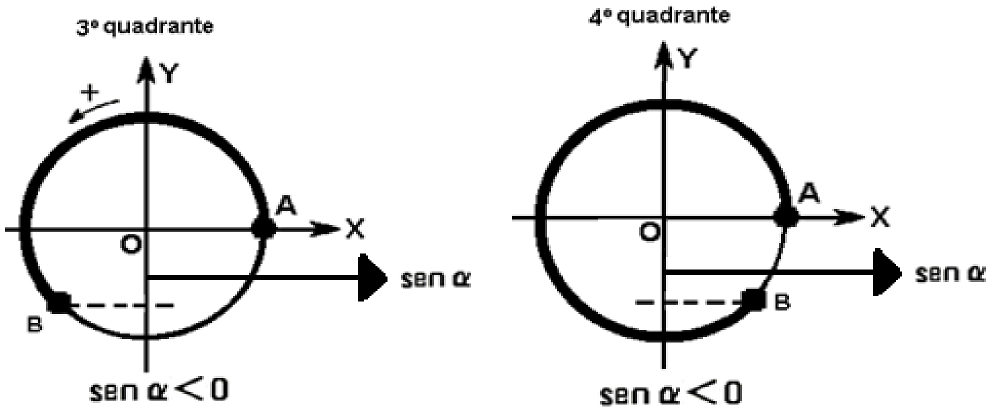
A partir dos resultados acima,podemos concluir que o seno e o cosseno variam de **-1** a **1**. Assim, podemos dizer que: **$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$ e $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$**

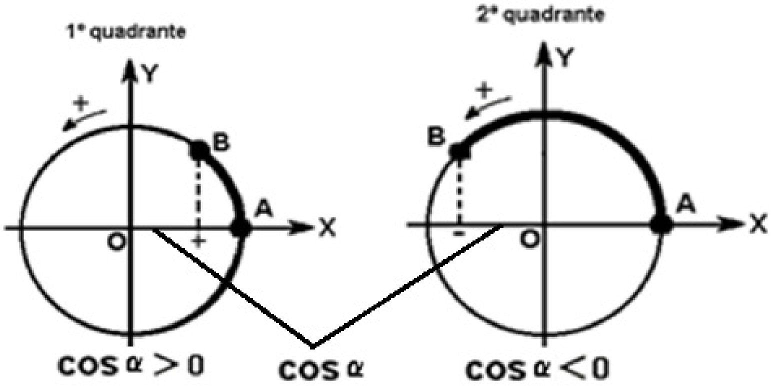
Sinais do seno e do cosseno

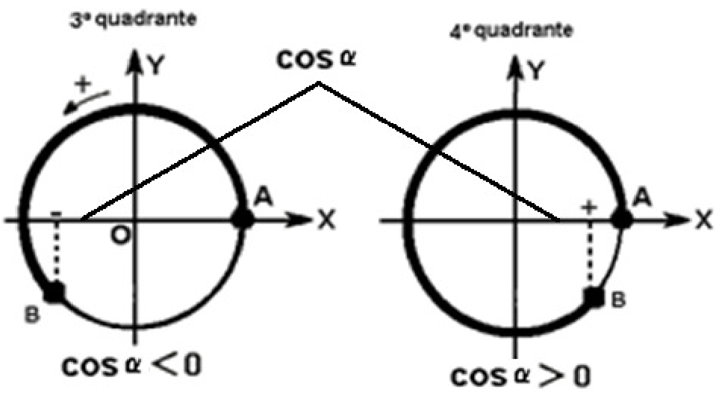
Para determinar os sinais do seno e do cosseno para um arco de medida α e extremidade B, basta verificar em que quadrante se localiza a extremidade B do arco de medida α.
Vejamos para o caso do seno α:



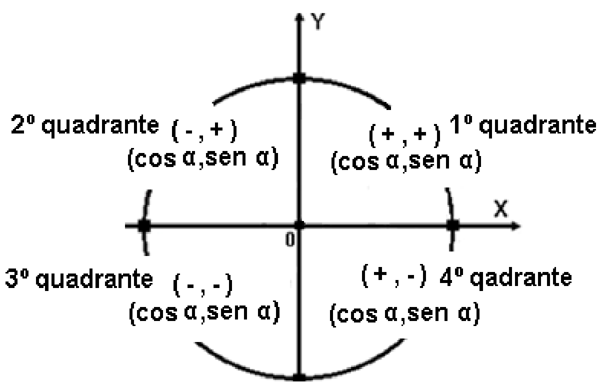








Reunindo num único ciclo trigonomérrtico temos:



Pela figura acima, podemos observar que:
1º quadrante: sen α > 0 e cos α > 0
2º quadrante: sen α > 0 e cos α < 0
3º quadrante: sen α < 0 e cos α < 0
4º quadrante: sen α < 0 e cos α > 0

Exemplos:

a) Calcular sen 450º

Solução:
Como 450º é maior que 360º, vamos dividir 450º por 360º e encontrar o resto e verificar que quadrante pertence.

$$\begin{array}{l|l} 450^\circ & 360^\circ \\ \hline 90^\circ & 1 \end{array} \longrightarrow 450^\circ \equiv 90^\circ \longrightarrow \text{sen } 450^\circ = \text{sen } 90^\circ = 1$$

Portanto, sen450 é igual a 1

b) Ache o valor de 2 sen $\frac{\pi}{3}$ - 3 sen $\frac{3\pi}{2}$

Solução:

Substituindo pelos valores notáveis e da tabela anterior, temos:

$$\frac{\pi}{3} = 60^\circ \text{ e } \frac{3\pi}{2} = 270^\circ \longrightarrow 2.\frac{\sqrt{3}}{2} - 3 . (-1) = \frac{2.\sqrt{3}}{2} - 3 = \sqrt{3} - 3$$

c) Ache o valor de sen (- 900º)

Solução:

Dividindo - 900º por 360º e adicionar 360º ao resto para calcular o seno em função da 1 ª determinação:

$$\begin{array}{l|l} -900^\circ & 360^\circ \\ \hline -180^\circ & 2 \end{array} \longrightarrow -180^\circ = 1^{\text{a}} \text{ determinação negativa.}$$

Adicionando 360º teremos a 1ª determinação positiva:

- 180º + 360º = 180º.
Então, - 900º ≡ 180º $\longrightarrow$ sen (- 900º) = sen 180º = 0.

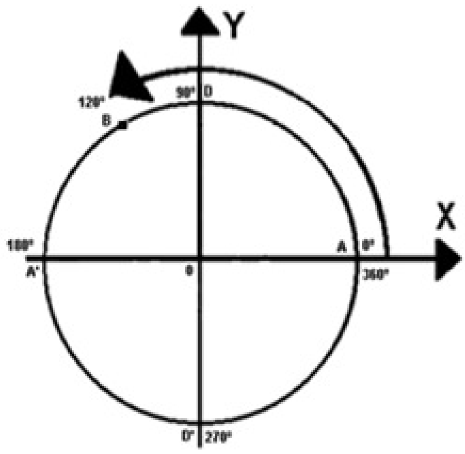
Redução de arcos ao 1º quadrante

A redução de arcos ao 1º quadrante é o procedimento utilizado para determinar o seno e o cosseno de arcos maiores que 90º através do seno e do cosseno dos arcos de 0º a 90º. Vejamos:

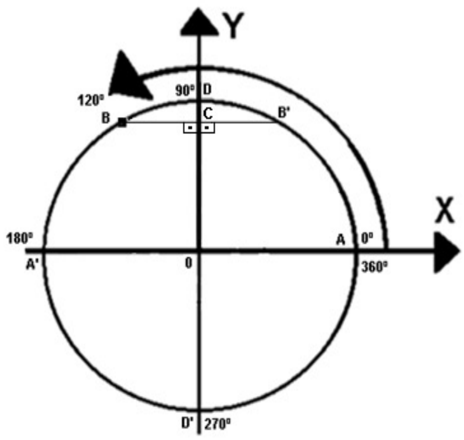
a) Redução de arcos do 2º quadrante ao 1º quadrante:

Considere o primeiro exemplo: Seja um arco AB de 120º, como podemos determinar o sen 120º e o cos120º em função dos arcos de 0º a 90º? Para isso, vamos seguir os passos abaixo:

1º) Traçamos o arco AB de 120º no ciclo trigonométrico.



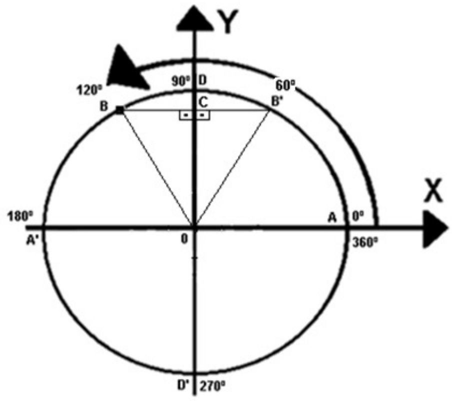
2º) Aplicamos a simetria do ponto B em relação ao eixo 0X(eixo dos senos), interceptando-o em C, onde teremos o ponto B' simétrico de B do 1º quadrante.



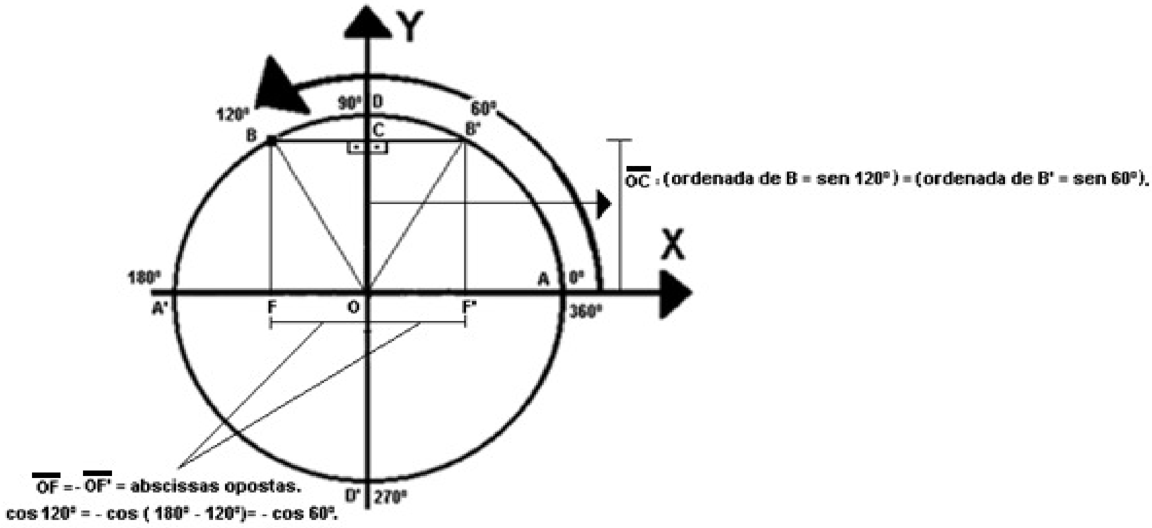
3º) Unimos os pontos B e B' ao ponto 0(origem), formando assim dois arcos : BA' e AB'. Por outro lado, como A e A' são simétricos em relação ao eixo (0X) e também B e B', concluímos que os arcos BA' e AB' são congruentes.

4º) Agora, para determinar a medida dos arcos BA' e AB', faremos o seguinte raciocínio: Med(BA') = Med(AA') – Med(AB) = 180º - 120º = 60º. Então, BA' =

60º e consequentemente AB'= 60º. Dessa forma, B corresponde à medida de 120º e o seu ponto simétrico B' à medida de 60º, ou seja, para determinar o simétrico da extremidade de um arco do 2º quadrante no 1º quadrante, basta subtrair de 180º o ângulo correspondente a extremidade do arco do 2º quadrante, isto é, 180º - 120º = 60º.



5º) Finalmente, temos que a ordenada de B ($\overline{\mathbf{OC}}$) que corresponde a sen 120º é a mesma de B' que corresponde a sen 60º e a abscissa de B(-$\overline{\mathbf{OF}}$) é oposta a de B'($\overline{\mathbf{OF}}$), isto é, sen 120º = sen 60º $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ e cos 120º = - cos 60º = $-\frac{1}{2}$.



Um segundo exemplo seria: sen 150º = ? e cos 150º=?

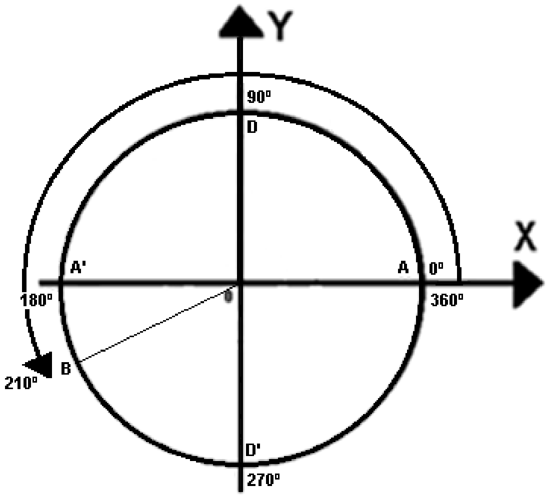
Solução: Como 150º está no segundo quadrante, basta subtraí-lo de 180º, onde obteremos 30º como o arco simétrico ao arco de 150º. Assim:

sen 150º = sen (180º - 150º) = sen 30º = $\frac{1}{2}$ e cos 150º = - cos 30º = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

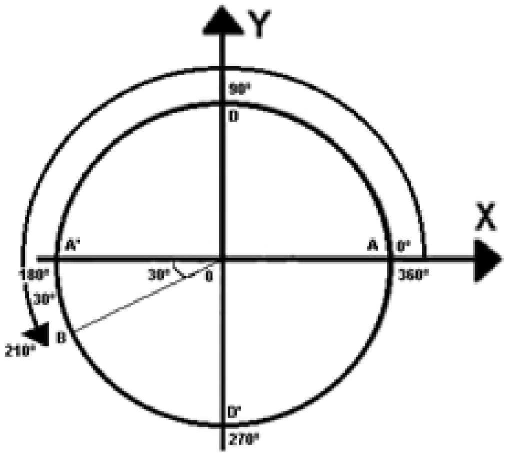
De modo geral para determinar o seno e o cosseno de qualquer arco (α) do 2º quadrante, basta aplicar a relação:

sen α = sen (180º - α)	cos α = - cos (180º - α)

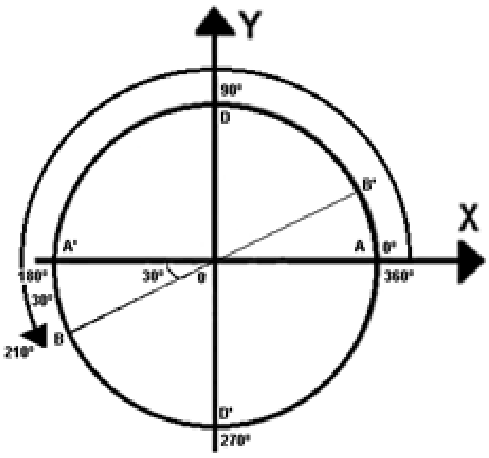
b) Redução de arcos do 3º quadrante ao 1º quadrante:
Considere o arco de 210º. Vamos determinar sen120º e cos120º pelo mesmo processo aplicado aos exemplos anteriores, seguindo os seguintes passos:
1º) Traçamos o arco AB de 210º no ciclo trigonométrico;



Notemos que a medida do arco A'B é dada por: Med(AB) – Med(AA') = 210º - 180º = 30º. Dessa forma, o ângulo central(A'ÔB) correspondente ao arco A'B mede 30º.

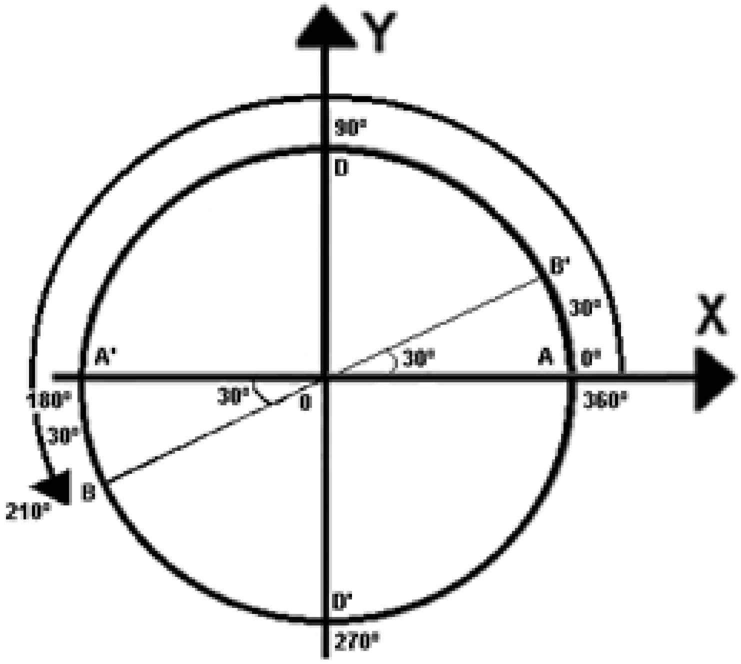


2º) Aplicando a simetria do ponto B em relação ao centro do ciclo trigonométrico, obtemos o ponto B' do 1º quadrante, simétrico de B;



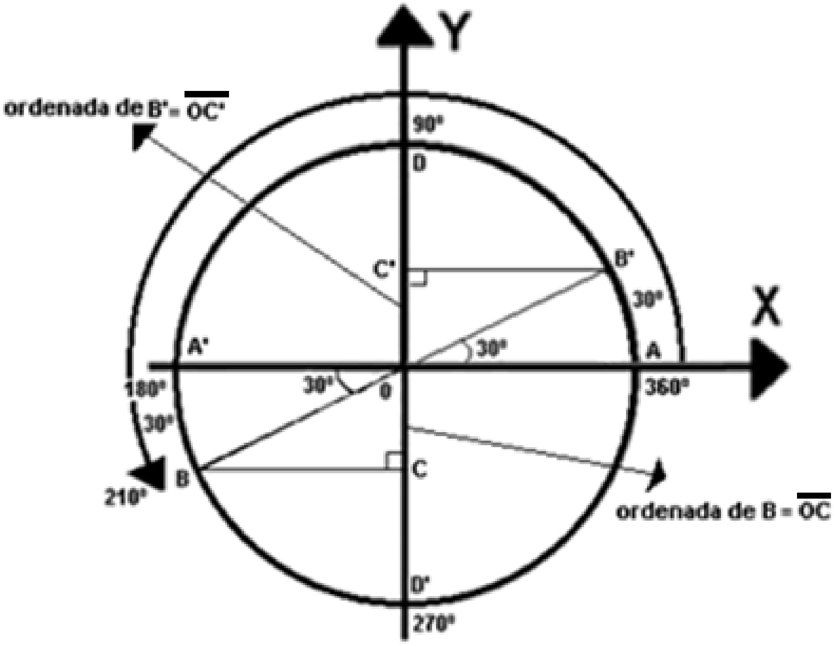
3º) Notemos que após a determinação de B', temos o ângulo AÔB' que é oposto pelo vértice de A'ÔB. Logo,as suas medidas iguais, assim como os arcos que lhes correspondem. Assim, teremos:

AÔB' = A'ÔB = 30º ⇒ $\widehat{AB'}$ = $\widehat{A'B}$ = 30º.

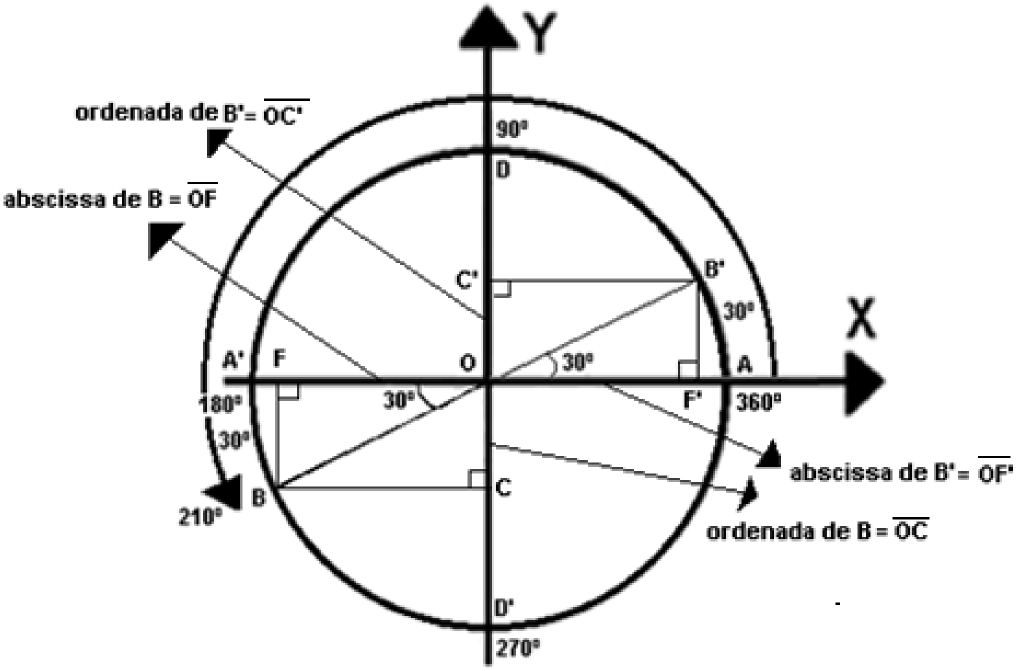


4º) Assim, verificamos então que o ponto B corresponde à medida de 210º possui o ponto simétrico B' do 1º quadrante correspondente à medida de 30º, ou seja, para determinar o ponto simétrico da extremidade de um arco do 3º quadrante no 1º quadrante, basta subtrair 180º do valor dado(210º), isto é 210º - 180º = 30º.

5º) Agora, traçamos a ordenada de B ($\overline{OC}$) que corresponde a sen 210º e a ordenada de B'($\overline{OC'}$) que corresponde a sen 30º. Porém, os arcos AB' e A'B são opostos. Logo, as ordenadas de B e B' são opostas, isto é, sen 210º = - sen 30 = - $\frac{1}{2}$**.**



6º) Seguindo o mesmo raciocínio para as abscissas de B e B', temos que os seus valores também são opostos. Logo, cos 210º = - cos 30º = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

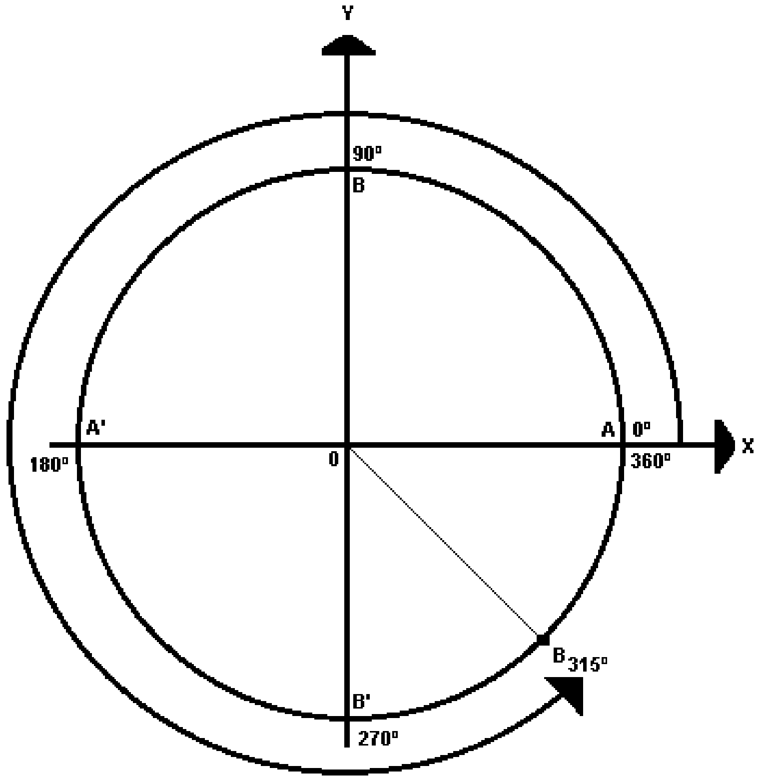


De modo geral para determinar o seno e o cosseno de qualquer arco (α) do 3º quadrante, em função dos arcos do 1º quadrante, basta aplicar a relação:

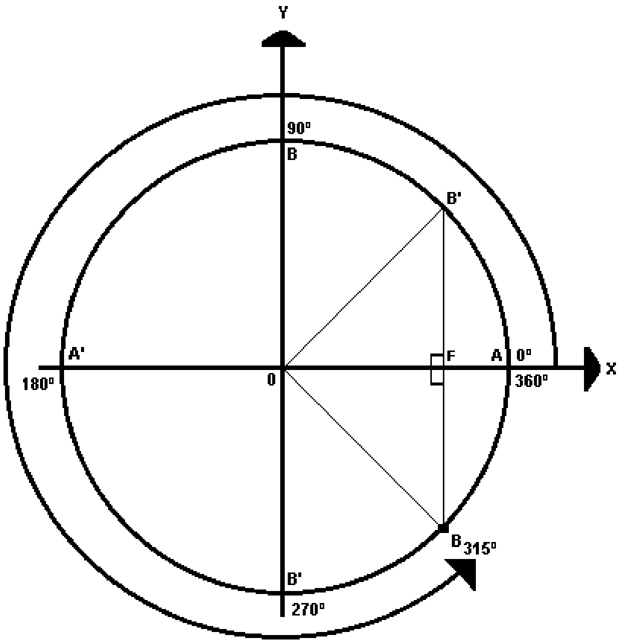
sen α = - sen (α – 180º)	cos α = - cos(α – 180º)

c) Redução de arcos do 4º quadrante ao 1º quadrante:

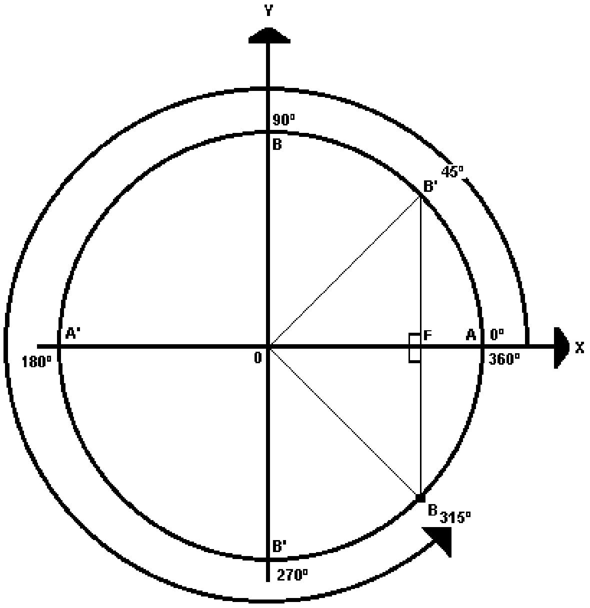
1º) Considere o arco de 315º. Vamos determinar sen 315º e cos 315º pelo mesmo processo aplicado aos exemplos anteriores, seguindo os seguintes passos:



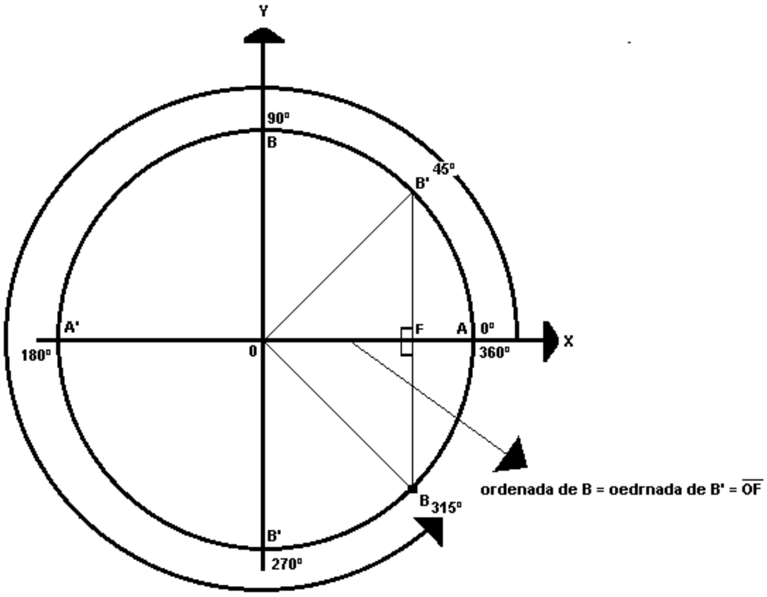
2º) Aplicando a simetria do ponto B em relação ao eixo(0X),obtemos o ponto B' do 1º quadrante, simétrico de B, onde que em seguida, ao unirmos o centro 0 aos pontos B e B', teremos assim dois arcos simétricos: $\widehat{AB'}$ e $\widehat{BA}$.



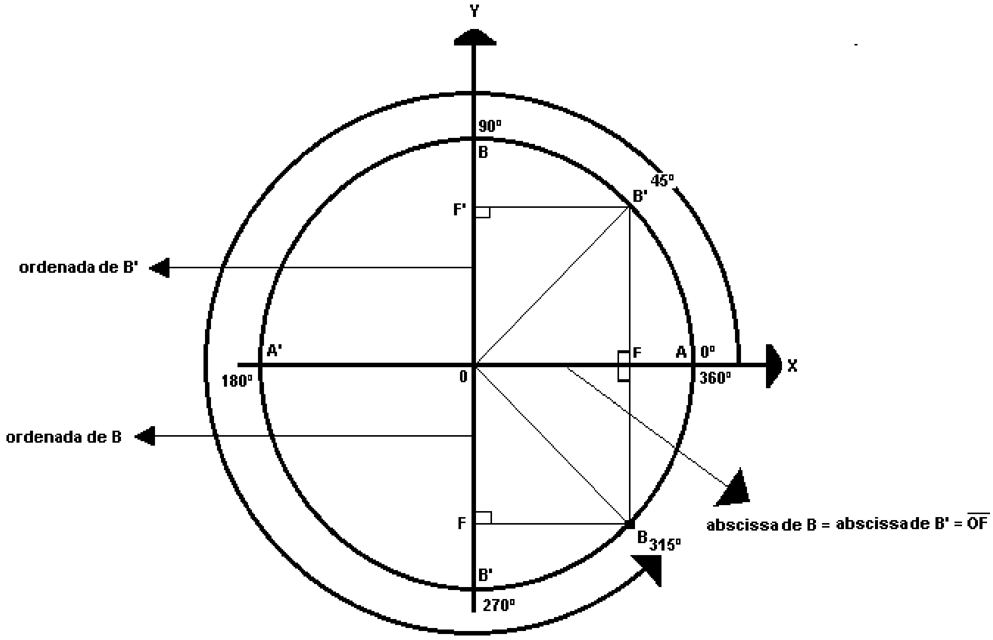
3º) O arco $\widehat{BA}$ é determinada por: 360º - 315º = 45º. Todavia, $\widehat{BA}$ é simétrico ao arco $\widehat{AB}'$. Logo, $\widehat{AB}'$ mede 45º.



4º) Em seguida, podemos observar pela figura acima que as abscissas de B e B' são iguais ($\overline{0F}$).Logo os seus cossenos também são iguais: cos 315º = cos 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



5º) Traçando as ordenadas de B e B', notemos que as mesma são opostas: sen 315º = - sen 45º = - $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



De modo geral para determinar o seno e o cosseno de qualquer arco (α) do 4º quadrante, em função dos arcos do 1º quadrante, basta aplicar a relação:

$$\boxed{\text{sen } \alpha = -\text{ sen } (360^{\circ} - \alpha)}$$

$$\boxed{\cos \alpha = \cos(360^{\circ} - \alpha)}$$

Veja as tabelas e a representação geométrica dos principais valores de seno e cosseno.

Tabela 1

x(grau)	30º	150º	210º	330º
x (rad)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

x(grau)	60º	120º	240º	300º
x (rad)	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
sen x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Representação geométrica

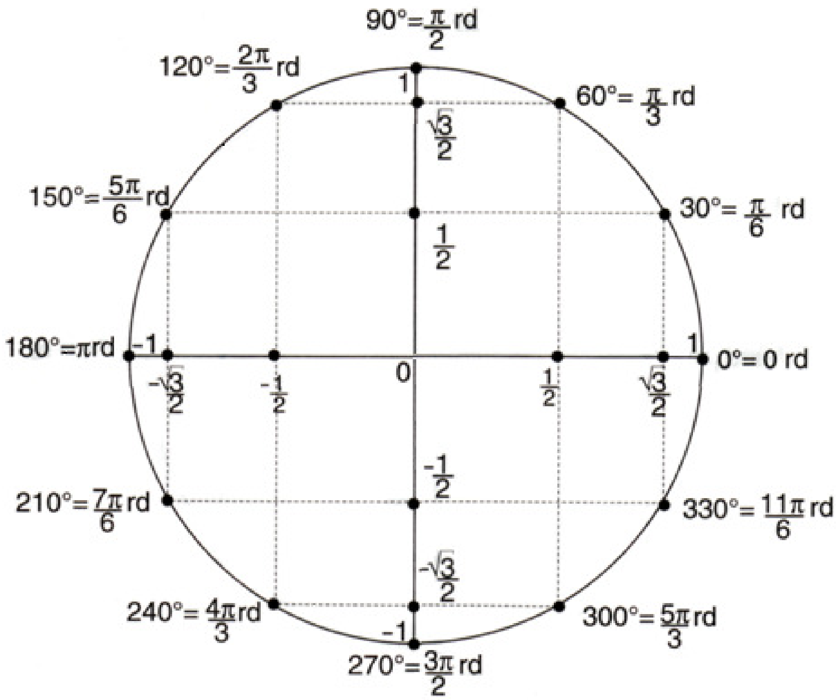
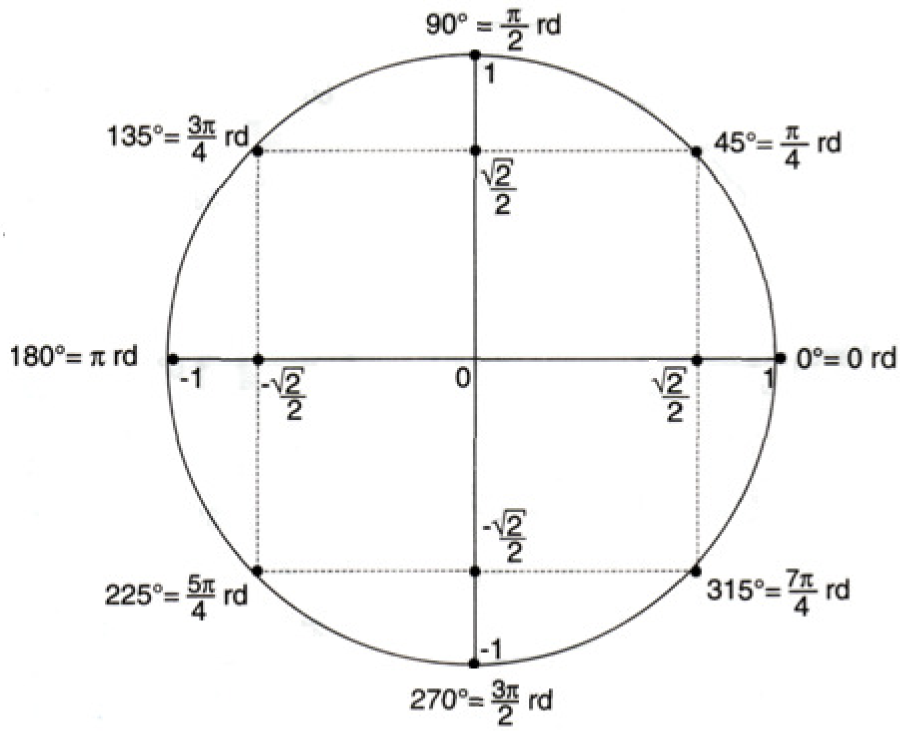


Tabela 2

x (grau)	**45º**	**135º**	**225º**	**315º**
x (radianos)	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
sen x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Representação geométrica



1. Calcule, reduzindo ao 1º quadrante:

a) sen 120º

b) cos $\frac{5\pi}{6}$

c) cos 135º

d) cos $\frac{2\pi}{3}$

e) sen 135º

f) sen $\frac{5\pi}{6}$

g) sen 225º

h) cos 225º

i) cos $\frac{7\pi}{6}$

j) cos 240º

l) sen 225º

m) sen $\frac{4\pi}{3}$

n) sen $\frac{3\pi}{4}$

o) sen 330º

p) cos 315º

q) cos 300º

r) sen $\frac{5\pi}{3}$

s) cos $\frac{11\pi}{6}$

2) Sabendo que sen24^0 = 0,4 e cos24^0 = 0,9, determine:

a) cos 156^0

b) tg 336^0

c) sen $\frac{17\pi}{15}$

5, Determine o valor de x nas equações abaixo, sendo $0 \leq x \leq 2\pi$:

a) cosx = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) cosx = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) senα = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) senx = 1

e) cosx = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

f)) 2senx = $\sqrt{3}$

g) sen $\frac{x}{3}$ = 1

h) 2sen x = - 1

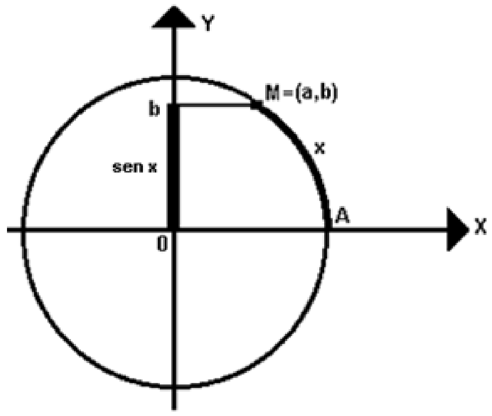
i) cos2x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

j) sen $\frac{x}{2}$ = 1

Função seno e cosseno

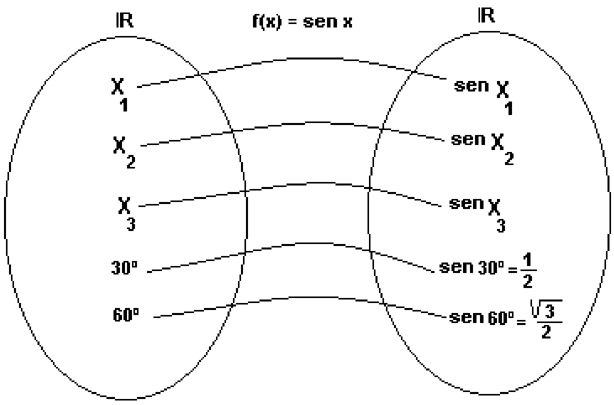
Função seno

É a função que associa cada número real x de um arco o valor do seno de x. Indicamos por: **f(x) = sen x ou y = sen x .**



Assim, para cada número real x, temos o par ordenado (a , b), onde a ordenada b está associada ao seno de x.

Em diagrama, temos:



Vejamos agora, como podemos esboçar o gráfico da função seno no plano cartesiano, através das medidas dos arcos trigonométricos.

Gráfico da função seno

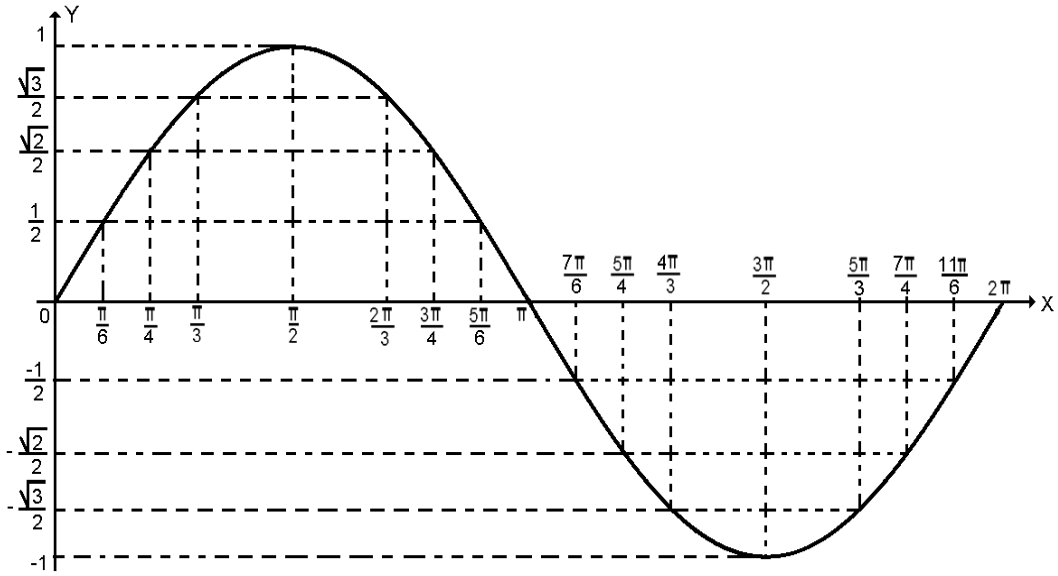
Para construir o gráfico das funções seno, utilizaremos uma tabela com os valores de x da 1ª volta positiva, isto é, no intervalo **0º ≤ x ≤ 360º ou 0 ≤ x ≤ 2π.**

x (grau)	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
x (radianos)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

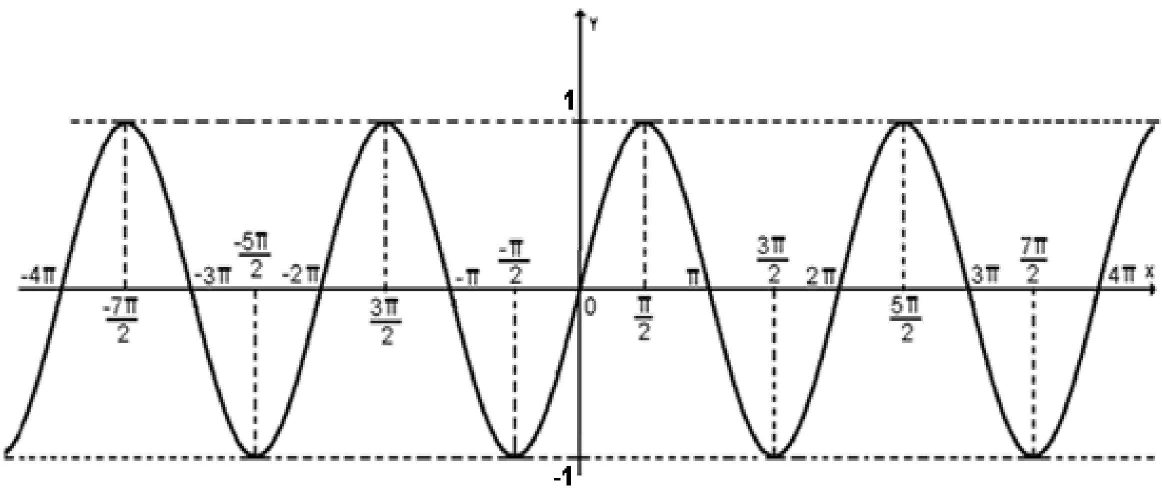
x (grau)	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
x (radianos)	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Agora, construiremos o gráfico do **sen x** utilizando apenas os valores em radianos:

y = sen x



Também podemos representar o gráfico da função sen x para os demais valores reais, maiores que 2π e menores que zero.Vejamos:

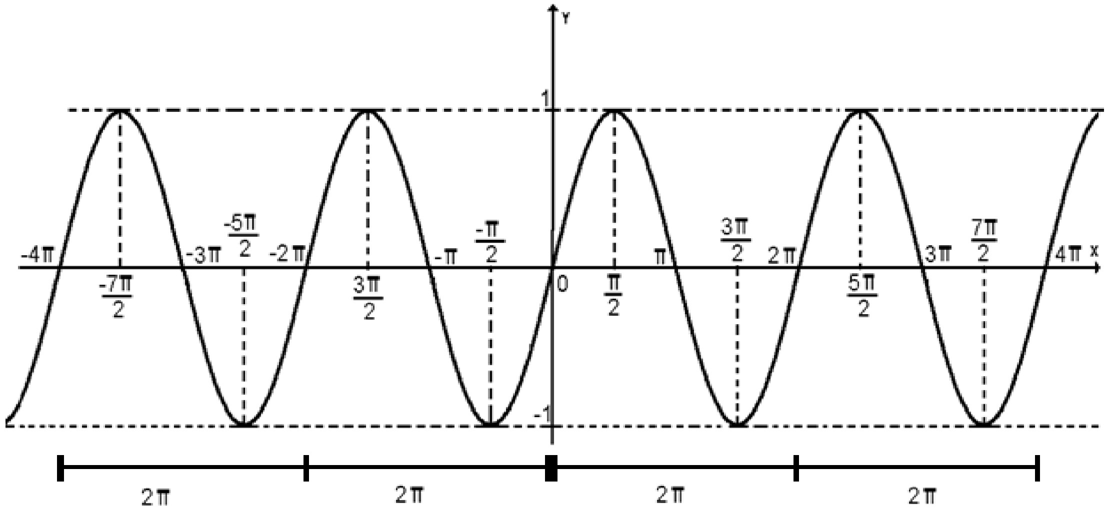


De posse do gráfico acima, podemos destacar:

a) O **domínio** é o conjunto dos números reais e a **imagem** é o intervalo [-1 ,1].

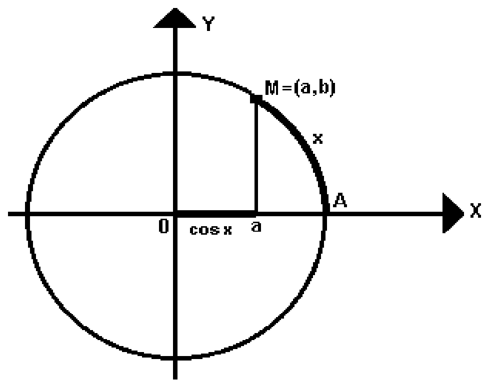
b) O gráfico pode ser estendido para valores de **x** menores que zero e maiores que **2π**. Dessa maneira tal gráfico denomina-se **senoide**;

c) Quando **x** percorre os intervalos **[0, 2π], [2π, 4π], [- 2π, 0], [- 4π,- 2π],...,** podemos observar que os valores da função se repete periodicamente. E tal repetição ocorre em um intervalo de **2π em 2π.** Logo, dizemos que a função seno é periódica de período **2π.** Vejamos no gráfico abaixo**:**

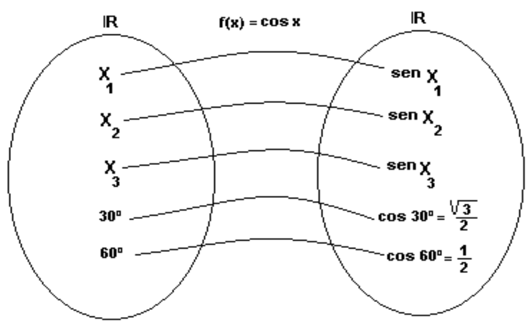


Função cosseno

É a função que associa a cada número real x de um ângulo ou arco o valor de cosseno de x. Indicamos por: **f(x) = cos x ou y = cos x .**



Assim, para cada número real x, temos o par ordenado (a , b), onde a abscissa a está associada ao cosseno de x.
Em diagrama, temos:



No ciclo trigonométrico, temos:
Assim, para cada x real, temos o correspondente b, que é a abscissa do ponto M, extremidade do arco de x graus ou x radianos.

Gráfico da função cosseno

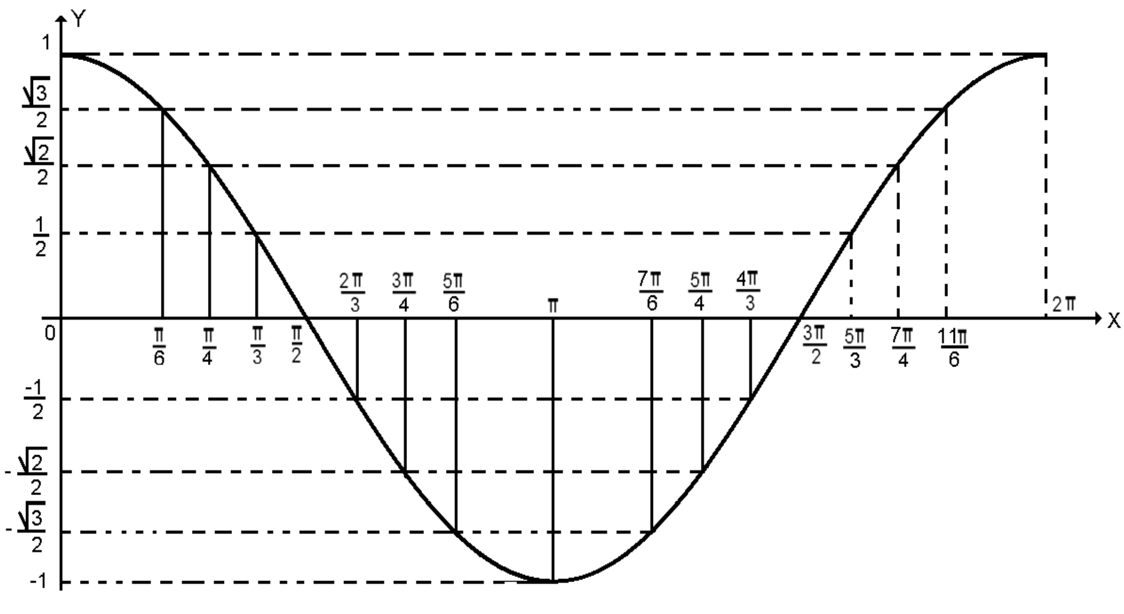
Utilizando o mesmo raciocínio para o gráfico da função seno, iremos utilizar a seguinte tabela com os valores de x da 1ª volta positiva, isto é, **0º ≤ x ≤ 360º ou 0 ≤ x ≤ 2π.**

x (grau)	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
x (radianos)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

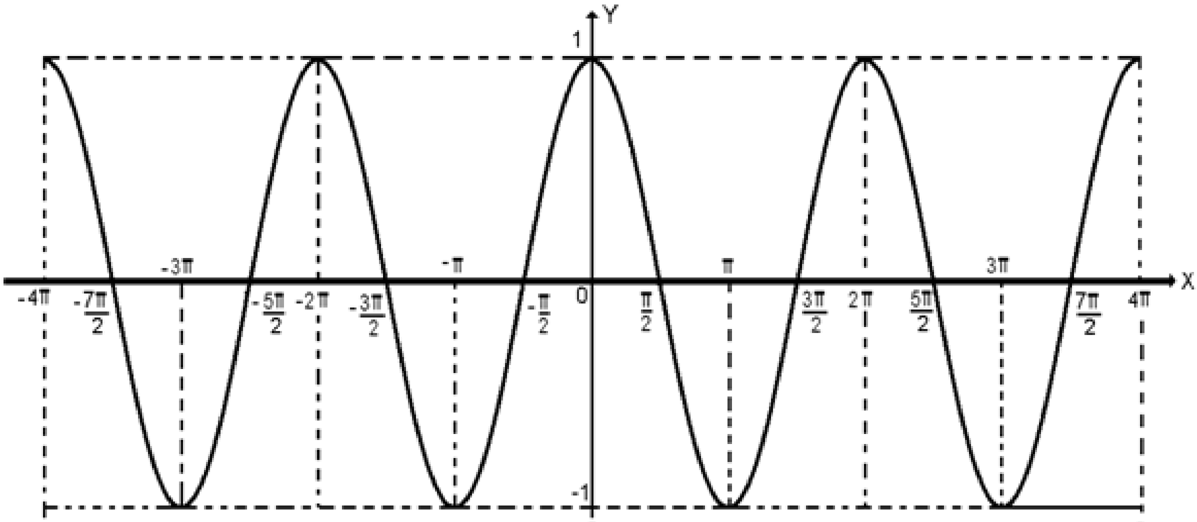
x (grau)	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
x (radianos)	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cos x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Agora, construiremos o gráfico do cos x utilizando apenas os valores em radianos:

y = cos x



Da mesma forma que o **seno**, também podemos representar o gráfico da função **cosseno** para os demais valores reais, maiores que 2π e menores que zero.Vejamos:

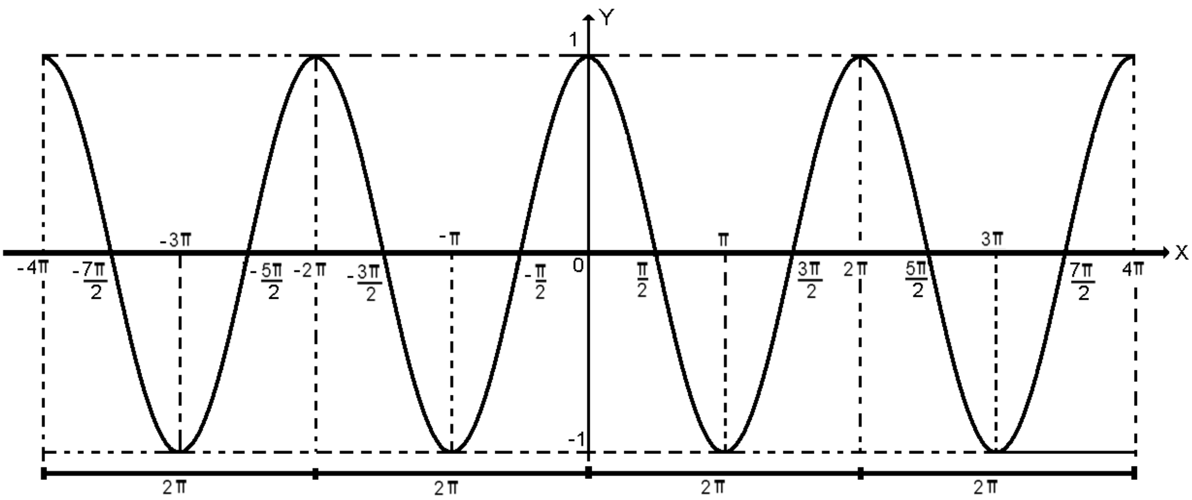


De posse do gráfico acima, podemos destacar:

a) O **domínio** é o conjunto dos números reais e a **imagem** é o intervalo [-1 ,1].

b) O gráfico pode ser estendido para valores de **x** menores que zero e maiores que **2π**. Dessa maneira tal gráfico denomina-se **cossenoide**;

c) Quando **x** percorre os intervalos **[0, 2π], [2π, 4π], [- 2π, 0], [- 4 π,- 2π],...,** podemos observar que os valores da função se repete periodicamente. E tal repetição ocorre em um intervalo de **2π em 2π.** Logo, dizemos que a função seno é periódica de período **2π.** Vejamos no gráfico abaixo**:**



Observação: No estudo da corrente alternada, em eletricidade, temos o uso das funções trigonométricas, para descrever a tensão e a corrente alternada. ; que são representadas por **senóides ou cossenóides.**

Exemplo: Um alternador produz corrente elétrica cujos valores instantâneos obedecem a uma forma senoidal de onda determinada pelas equações:

Corrente: $i = I_{máx}$ sen($\omega t + \varphi$)

Tensão: $v = V_{máx}$sen($\omega t + \varphi$)

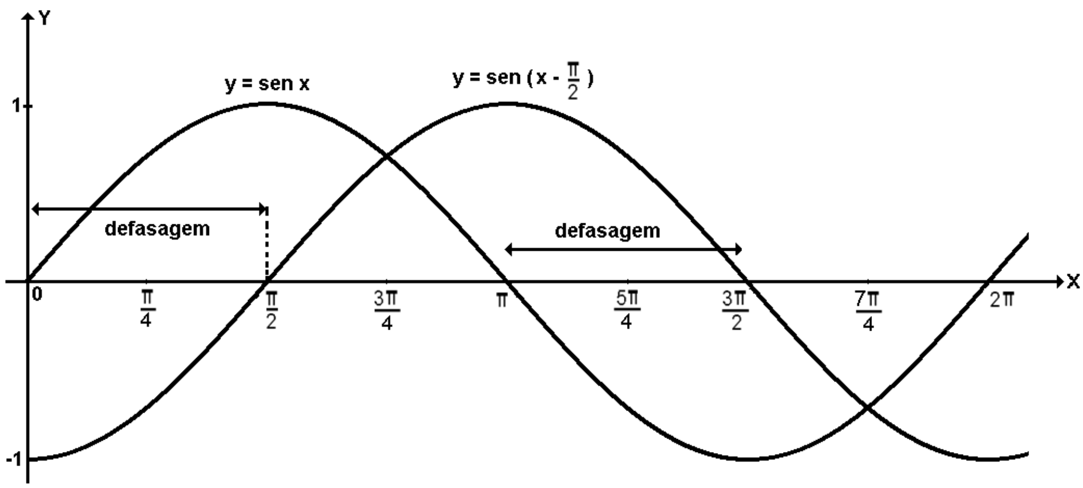
ω = Freqüência angular = **$2\pi f$.**
f = Freqüência.
t = Tempo.
φ = Ângulo de fase.

O ângulo de fase, no fornece o que chamamos de: **Diferença de fase ou defasagem**, que representa a diferença entre duas senóides ou ondas senoidais de mesmo período, durante o tempo em que elas cruzam o eixo horizontal(**0x**). Na prática, tal defasagem é determinada por um aparelho denominado osciloscópio.

Vejamos, por exemplo a defasagem abaixo:

Exemplos:

Considere os gráficos de y = sen x e y = sen (x - $\frac{\pi}{2}$)



A defasagem entre as funções é de $\frac{\pi}{2}$.

Exercícios Resolvidos

Construa o gráfico, dê o domínio, a imagem e o período da função y = 3.senx

Solução:

Para construir o gráfico da função y = 3.senx, podemos construir uma tabela em quatro etapas:

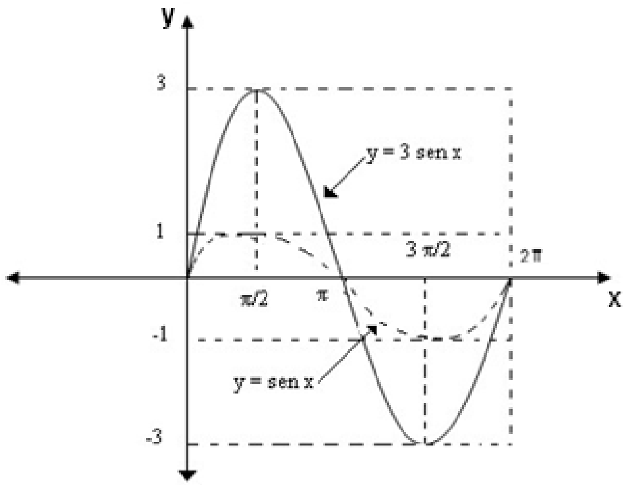
- atribuímos valores convenientes para x. Para facilitar atribuímos a x os valores
$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

- associamos a **x** os correspondentes valores de senx;

- Achamos **y** multiplicando senx por 3

- finalmente, escrevemos os pares ordenados.

x	senx	y = 3senx	(x, y)
0	0	0	(0, 0)
$\frac{\pi}{2}$	1	3	$\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$
π	0	0	$(\pi, 0)$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-3	$\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$
2π	0	0	$(2\pi, 0)$



Domínio = R
Imagem = [-3, 3]
Período = 2π

Construa o gráfico, dê o domínio, a imagem e o período da função y = cos $\frac{x}{2}$

Solução:

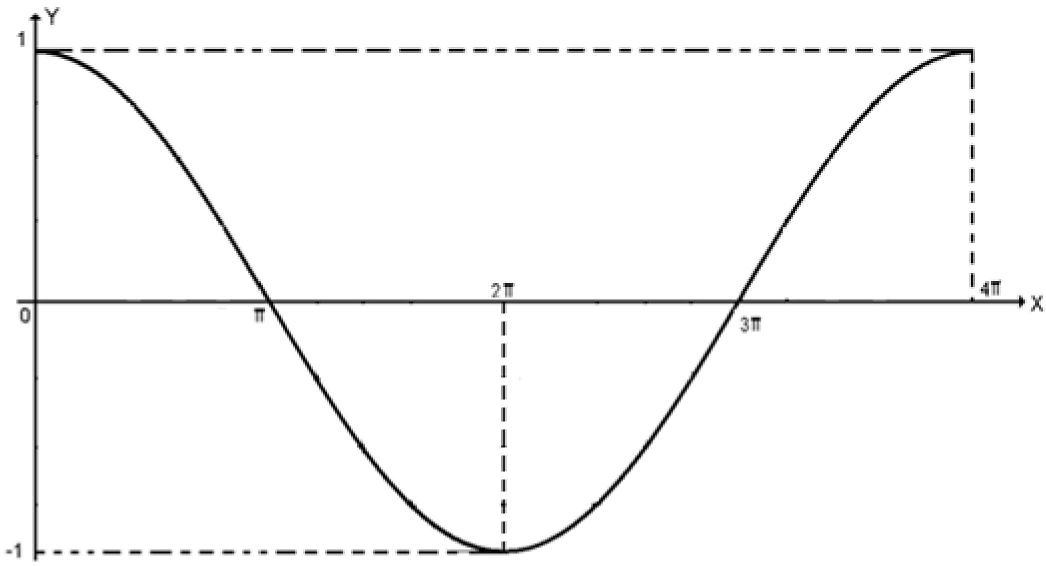
- atribuímos valores convenientes para $\frac{x}{2}$,

- igualamos $\frac{x}{2}$ com os valores atribuídos, obtendo x;

- associamos a $\frac{x}{2}$ os correspondentes valores de cos $\frac{x}{2}$ e achamos **y**;

- finalmente, escrevemos os pares ordenados.

$\frac{x}{2}$	x	y = cos $\frac{x}{2}$	(x, y)
0	0	1	(0, 1)
$\frac{\pi}{2}$	π	0	$(\pi, 0)$
π	2π	-1	$(2\pi, -1)$
$\frac{3\pi}{2}$	3π	0	$(3\pi, 0)$
2π	4π	1	$(4\pi, 0)$



Exercícios

1) Construa o gráfico, dê o domínio, a imagem e o período das seguintes funções:

a) $y = 2\cos x$

X	cosx	y = 2cosx	(x, y)
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{3\pi}{2}$			
2π			

b) $y = \text{sen}2x$

2x	x	y = sen2x	(x, y)
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{3\pi}{2}$			
2π			

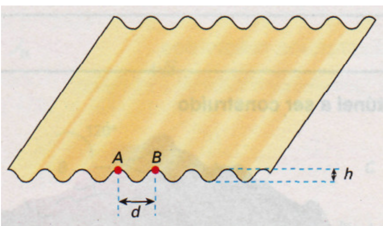
c) y = 1 + cosx

X	cosx	y = 1 +cosx	(x, y)
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{3\pi}{2}$			
2π			

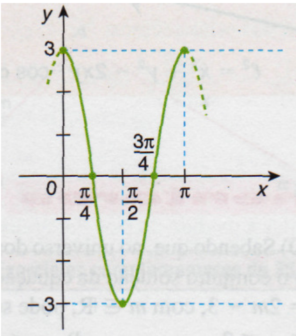
d) y = 5 sen $\frac{x}{4}$

$\frac{x}{4}$	x	$\cos\frac{x}{4}$	$y = 5\cos\frac{x}{4}$	(x, y)
0				
$\frac{\pi}{2}$				
π				
$\frac{3\pi}{2}$				
2π				

2) O perfil da telha ondulada, representada na figura abaixo, pode ser descrito pela função f(x) = 4 cos $\frac{x}{3}$, em que os valores absolutos de x e f(x) indicam medidas em centímetro. Calcule as medidas h e d, indicadas na figura, sendo que A e B são cristas de ondas.



3) O gráfico abaixo representa a função y = t. cos mx .Os valores de t e m são respectivamente:



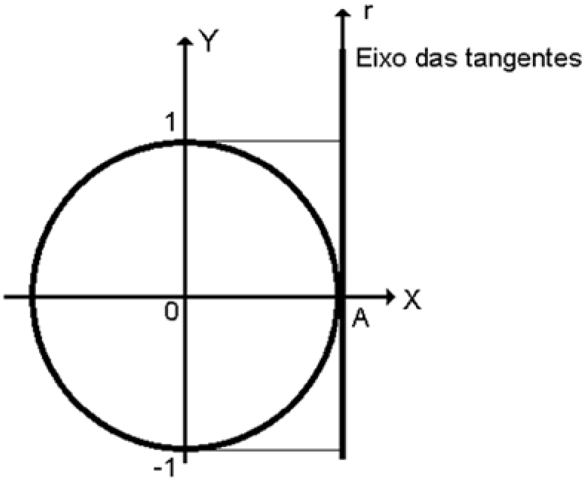
a) 3 e 1 b) 3 e - 3 c) 1 e 3 d) 3 e 2 e) 1 e 2

4) O custo de x dezenas de certo produto é dado pela função
C(x) = 3 – sen ($\frac{\pi}{3}x$) em milhares de reais. Qual é o valor do custo mínimo desses produtos? Quantas dezenas podem ser fabricadas por esse custo?

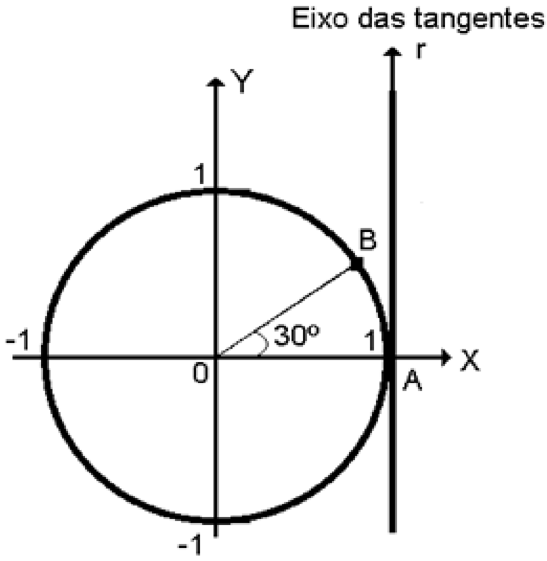
Tangente

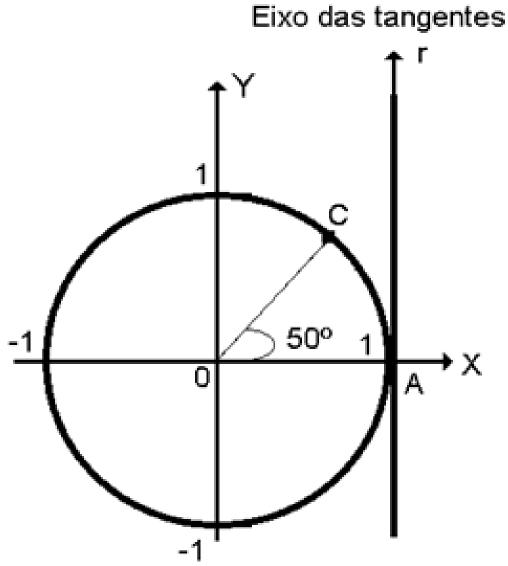
Eixo das tangentes

Considere a reta r tangente ao ciclo trigonométrico no ponto A(1,0).Com o auxílio desta reta, seremos capazes de determinar a tangente dos arcos de um número real x no ciclo trigonométrico. Assim, a reta r é definida como eixo das tangentes, onde A é a sua origem.

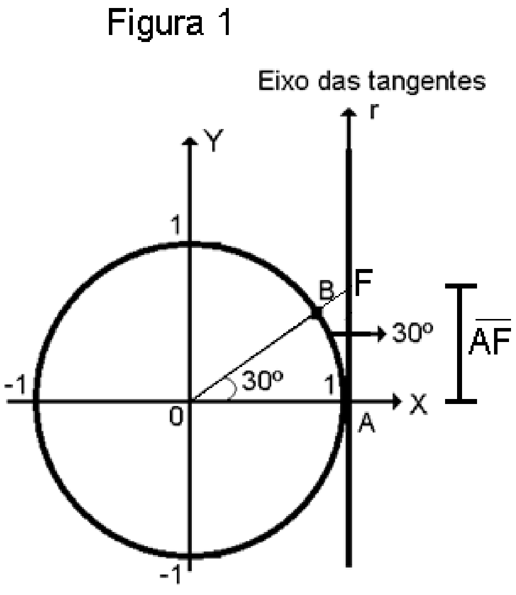


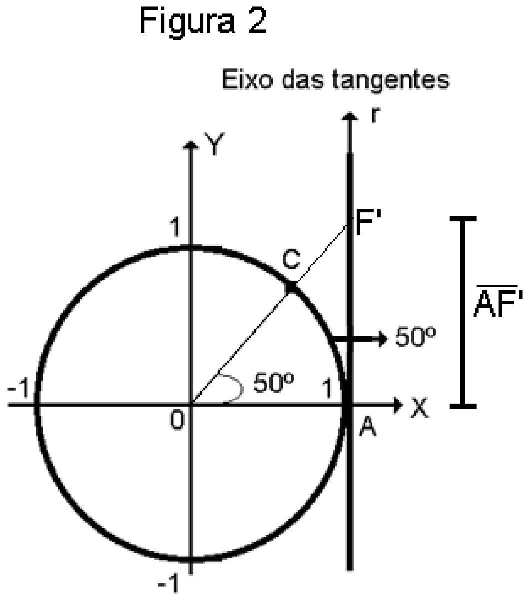
Por exemplo, vamos determinar as tangentes dos arcos: $\widehat{\mathbf{AB}}$ = **30º** e $\widehat{\mathbf{AC}}$ = **50°.**
Traçando cada arco no ciclo trigonométrico, temos:



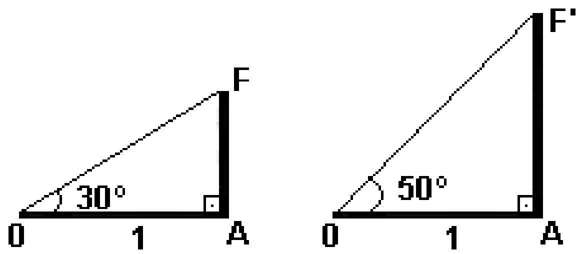


Notemos que ao prologarmos os seguimentos $\overline{\mathbf{OB}}$ e $\overline{\mathbf{OC}}$, relativos aos arcos de **30º** e **50º**, respectivamentes, iremos interceptar o eixo das tangentes nos pontos que definiremos por **F** e **F'**. Assim, teremos os seguimentos $\overline{\mathbf{AF}}$ e $\overline{\mathbf{AF'}}$ sobre o eixo das tangentes, que correspondem aos valores de **tg 30º** e **tg 50º**, respectivamente, isto é, $\overline{\mathbf{AF}}$ = **tg 30º** e $\overline{\mathbf{AF'}}$ = **tg 50º**.





A afirmação de que: $\overline{\mathbf{AF}}$ = **tg 30º** e $\overline{\mathbf{AF'}}$ = **tg 50º** se dá pelo fato de que em cada figura, temos um triângulo retângulo onde os segmentos $\overline{\mathbf{AF}}$ e $\overline{\mathbf{AF'}}$ **,** correspondem ao cateto oposto dos ângulos de **30º** e **50º**. Vejamos:

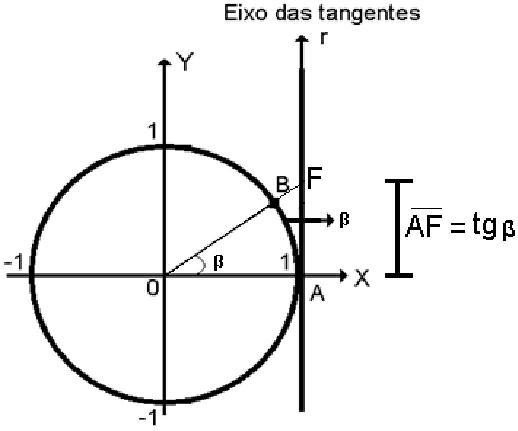


Lembrete: tg β = $\dfrac{\textbf{cateto oposto ao ângulo de } \boldsymbol{\beta}}{\textbf{cateto adjacente ao ângulo de } \boldsymbol{\beta}}$

Como o cateto adjacente de cada triângulo é unitário (raio do ciclo trigonométrico = 1), temos:

$$\textbf{tg } 30º = \frac{\overline{\mathbf{AF}}}{\overline{\mathbf{A0}}} = \frac{\overline{\mathbf{AF}}}{\mathbf{1}} = \overline{\mathbf{AF}} \quad \textbf{e} \quad \textbf{tg } 50º = \frac{\overline{\mathbf{AF'}}}{\overline{\mathbf{A0}}} = \frac{\overline{\mathbf{AF'}}}{\mathbf{1}} = \overline{\mathbf{AF'}}$$

Dessa forma podemos definir que a tangente de um **arco β** é a medida algébrica do segmento $\overline{\mathbf{AF}}$**,** isto é**, tg β** = $\overline{\mathbf{AF}}$. Além disso, podemos observar que o ponto **A** é a origem do eixo das tangentes.



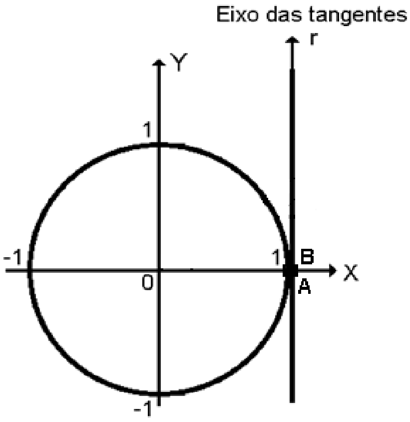
Por outro lado, sem sempre iremos nos prender à representação gráfica de todos os arcos para o cálculo da tangente.

Outros exemplos:

a) Vamos determinar tg 0º = ?

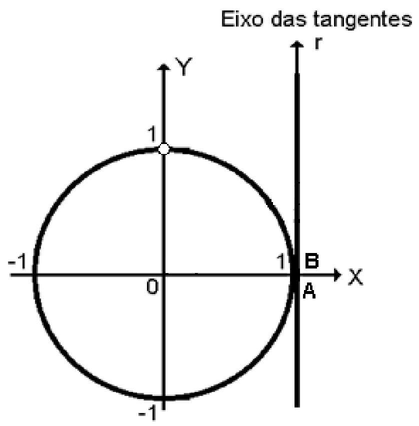
Solução:

Seja $\widehat{AB}$ = 0º. Podemos observar que a extremidade B do arco de 0º coincide com o ponto A (origem do eixo das tangentes). Então, o segmento $\overline{AF}$ = 0. Logo, **tg 0º = 0.**



b) tg 90º = tg $\frac{\pi}{2}$ = ?

Geometricamente, verificamos a impossibilidade para se determinar a tg 90°, pois o prolongamento do segmento OB é paralelo ao eixo das tangentes Assim, não existe o segmento $\overline{AF}$ que corresponde a tg 90°.



<u>Observação:</u> **Pelos estudos de trigonometria, sabemos que tg β = $\frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta}$. Assim, podemos determinar a tangente dos arcos sem a representação gráfica, bastando apenas o conhecimento do seno e cosseno do arco em estudo. Assim, poderíamos determinar tg 0º = $\frac{\text{sen } 0°}{\cos 0°}$ = $\frac{0}{1}$ = 0° e tg 90º = $\frac{\text{sen } 90°}{\cos 90°}$ = $\frac{1}{0}$ = ? Como não existe divisão por zero, então não existe tg 90°.**

c) tg 45º = tg $\frac{\pi}{4}$ = ?

Solução: tg 45° = $\frac{\text{sen } 45°}{\cos 45°}$ = $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ = 1.

d) tg 30° = tg $\frac{\pi}{6}$ = $\frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°}$ = $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ = $\frac{1}{2}$ x $\frac{2}{\sqrt{3}}$ = $\frac{2}{2\sqrt{3}}$ = $\frac{2.\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\ .\sqrt{3}}$ = $\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{9}}$ = $\frac{2\sqrt{3}}{2.3}$ = $\frac{2\sqrt{3}}{6}$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) tg 270º = tg $\frac{3\pi}{2}$ = $\frac{\text{sen } 270°}{\cos 270°}$ = $\frac{-1}{0}$ = não existe divisão por zero. Logo,

tg 270° não existe.

f) tg 180º = tg π = $\frac{\text{sen } 180°}{\cos 180°}$ = $\frac{0}{-1}$ = 0

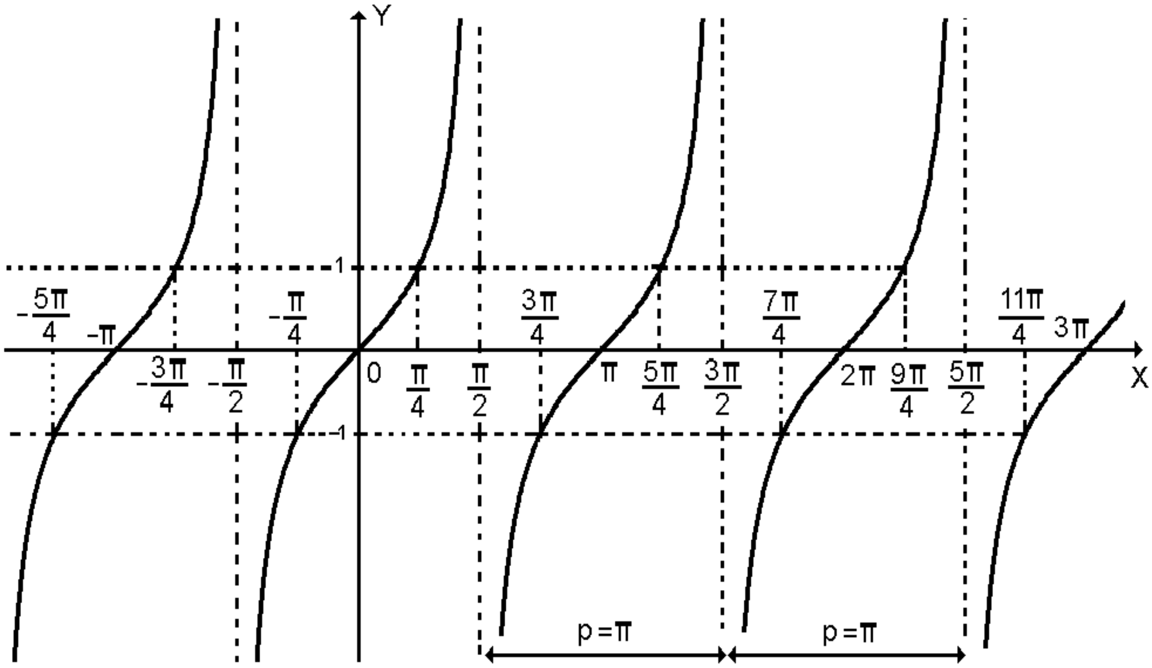
Pelos últimos exemplos acima, **tg x** não existe para os valores de x iguais a **90°($\frac{\pi}{2}$) e 270°($\frac{3\pi}{2}$).** Desse modo, não definiremos **tg x** para x = $\frac{\pi}{2}$ **+ k. π**

Gráfico da função tangente

Utilizando o mesmo raciocínio para o gráfico da função seno e cosseno, também iremos utilizar a tabela com os valores de x da 1ª volta positiva, isto é, **0º ≤ x ≤ 360º ou 0 ≤ x ≤ 2π**.

x (grau)	0º	45º	90º	135º	180º	225º	270º	315º	360º
x (radianos)	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
tg x	0	1	$\nexists$	-1	0	1	$\nexists$	-1	0

x (grau)	- 45º	- 90º	-135º	-180º	-225°
x (radianos)	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{4}$
tg x	-1	$\nexists$	1	0	-1



Exercícios:

1) Determine o valor de:

a) tg 60º

b) tg 120º

c) tg 225º

d) tg 135º

e) tg $\frac{5\pi}{6}$

f) tg $\frac{7\pi}{6}$

g) tg225º

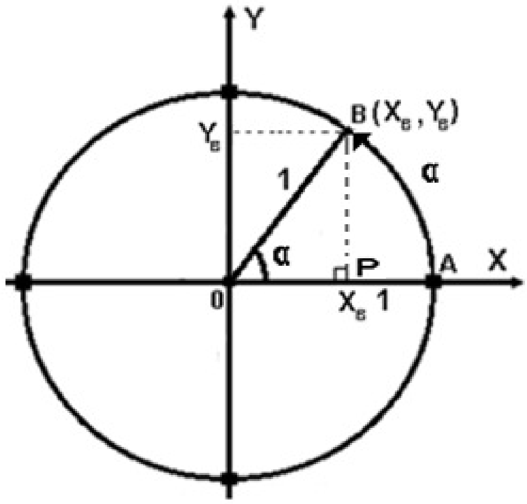
i) tg 330º

j) tg $\frac{4\pi}{3}$

r) sen $\frac{5\pi}{3}$

s) cos $\frac{11\pi}{6}$

Resumo Relações Fundamentais



Do triângulo OBP, temos sen α = $\frac{BP}{OB}$, mas como OB = R = 1, temos que:

sen α = BP.

cos α = $\frac{OP}{OB}$, mas OB = R = 1; portanto **cos α = OP**

Como OBP é retângulo, vale o Teorema de Pítágoras. Portanto, temos:

$OB^2 = BP^2 + OP^2$, ou seja:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Temos também, tg α = $\frac{BP}{OP}$, ou seja:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

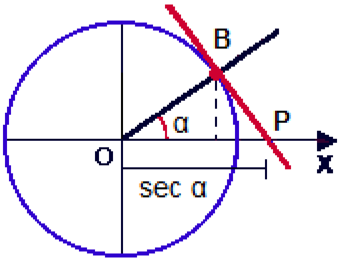
Algumas relações não são muito usuais, mais é bom ter o conhecimento. Veja a seguir:

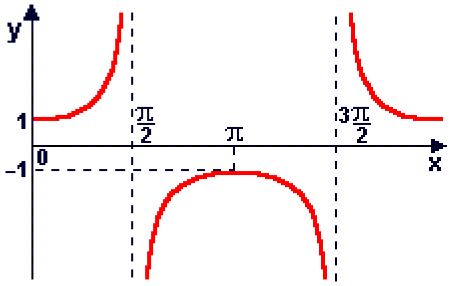
Secante

Definimos secante de um ângulo (sec α) como o inverso do cosseno, ou seja:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Gráfico

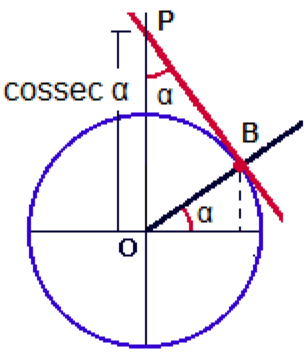


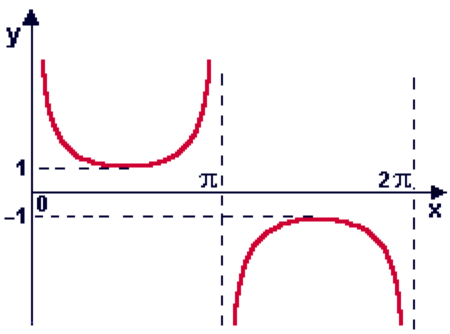


Cossecante

Definimos cossecante de um ângulo (cossec α) como o inverso do seno, ou seja:

$$\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$



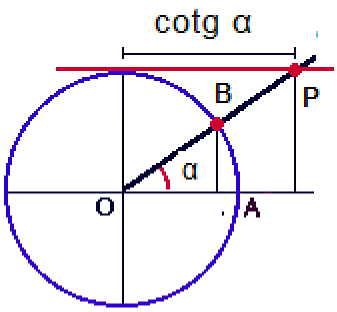


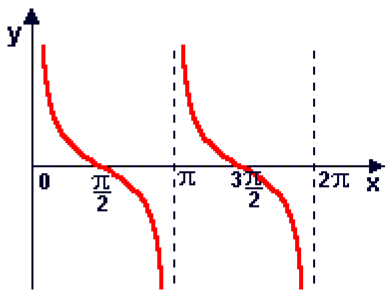
Cotangente

Definimos cotangente de um ângulo (cotg α) como o inverso da tangente, ou seja:

cotg α $= \dfrac{1}{\text{tg } \alpha}$, ou seja:

Gráfico





Relações decorrentes

1ª) Dividindo a relação sen α ² + cos α ² = 1 por $\cos^2\alpha$, temos:

: t $\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

2ª) Dividindo a relação sen α ² + cos α ² = 1 por $\text{sen}^2\alpha$, temos:

: $\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}$

$$1 + \text{cotg}^2\,\alpha = \text{cossec}^2\,\alpha$$

Bibliografia

BARROSO,Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

FACHINI, Walter. Matemática; volume único. São Paulo, Saraiva,1996.

GIOVANNI, José Rui; BONJORNO, José Roberto. Matemática. São Paulo, FTD,1992.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.
IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.
IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva,2010.

MARCONDES, Carlos Alberto ET AL. Matemática. São Paulo, Ática, 2000.
MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática antes e depois. São Paulo, Saraiva, 2006.

MUNOHZ, Ainda, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.
RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Sites:

http://www.somatematica.com.br

Escola 24 horas - http://www.escola 24h.com.br

http://www.matematica.com.br