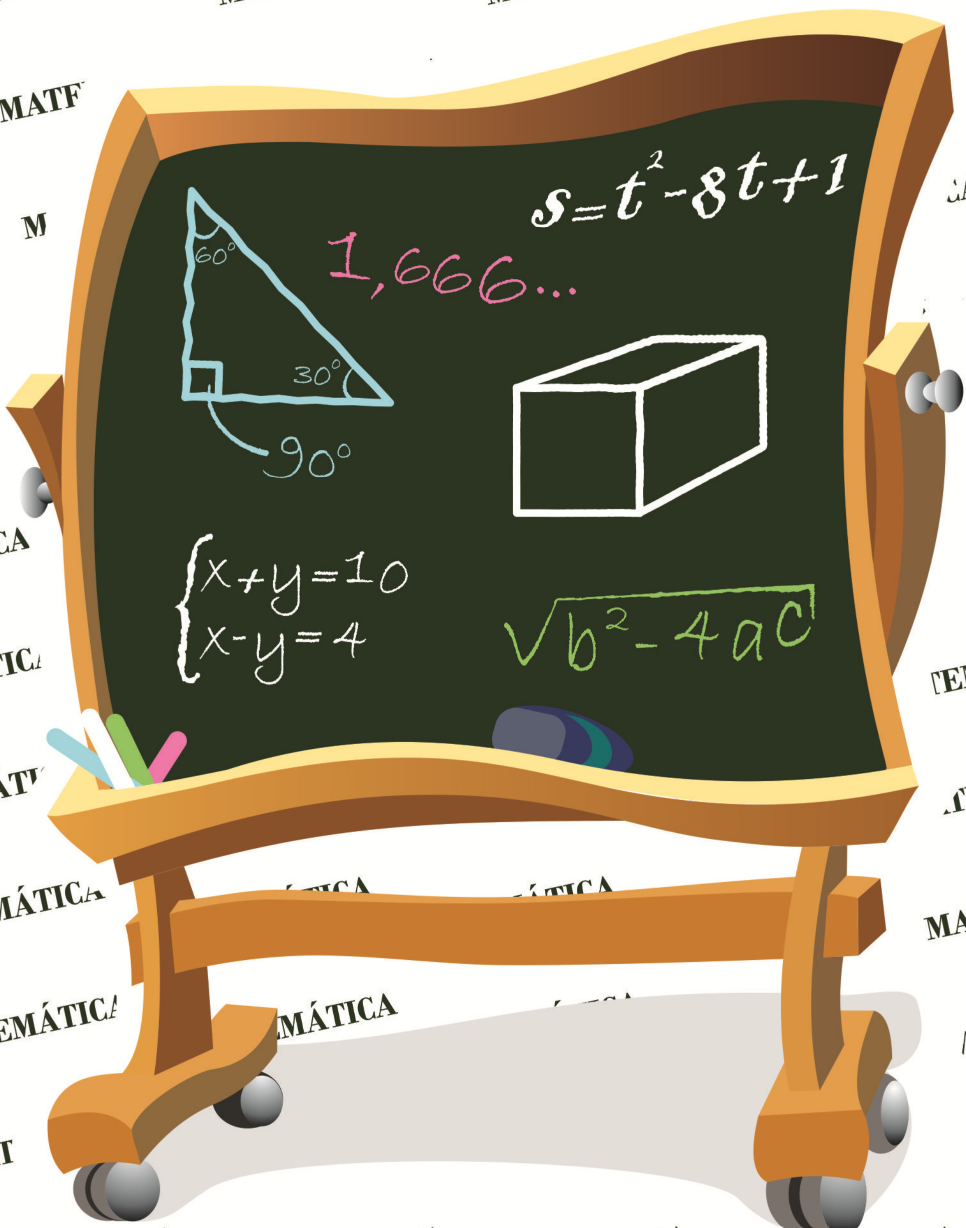
MATEMÁTICA



FAETEC
FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

ETEVM
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL VISCONDE DE MAUÁ

GOVERNO DO Rio de Janeiro

1º ANO

1ª etapa

Apostila I

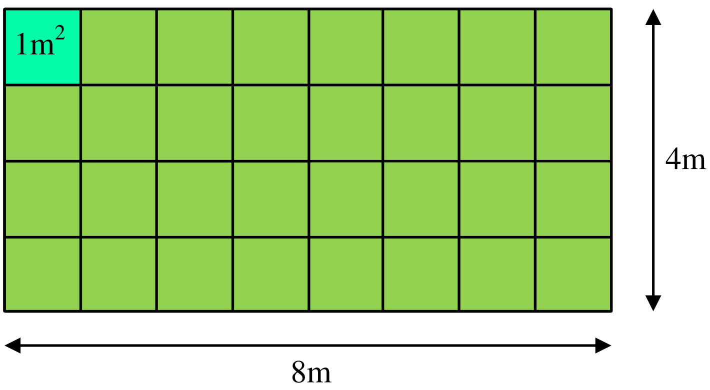
Matemática Básica

(Revisando Área e volume)

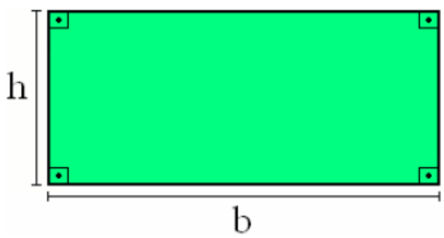
COORDENAÇÃO
SERGIO LOPES RODRIGUES

ÁREA DAS FIGURAS PLANAS

Desde a antiguidade, o homem necessitou medir e demarcar suas terras(daí surgiu o nome geometria = medida de terra). Para realizar as medições, os egípcios utilizavam cordas que continham vários nós, cuja unidade de medida correspondia à distância entre um nó e outro. A partir das medidas utilizando corda e realizando alguns cálculos eles conseguiam demarcar suas terras.
Até hoje, um procedimento comum nas medições é adotar uma unidade de medida e compará-la com a grandeza que se pretende medir.
Veja um exemplo prático:
Eduardo comprou placas de grama quadrangulares de $1m^2$ (1m x 1m) para gramar seu quintal retangular de 8 metros de comprimento e 4 metros de largura e aproveitou para explicar seu filho como calcularia a área do quintal a ser gramada.
Eduardo explicou que a medida da extensão ocupada pela superfície plana é um número chamado área da superfície, que expressa o número de vezes que a unidade padrão de área(placas de grama) cabe na superfície (quintal).
Preenchendo todo o quintal com as placas de grama de $1m^2$, Obtiveram 8 colunas com 4 placas em cada uma ou seja 32 placas. Então podemos dizer que a área do quintal é $8 \cdot 4 = 32\ m^2$.



Portanto, observamos que a área de um **retângulo** é dada pelo produto de suas dimensões(**comprimento x largura ou base x altura)**

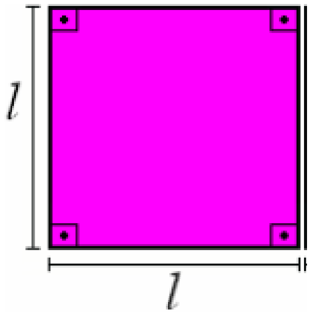


$$\boxed{A = b \cdot h}$$

Não é usual pegar uma placa de $1m^2$ e verificar quantas vezes ela cabe no terreno, ou seja, verificar o número de vezes que uma unidade padrão de área cabe em uma superfície desejada.
Em geral, para medir de uma forma mais simples uma superfície plana, utilizamos algumas fórmulas matemáticas que veremos a seguir.

Área do quadrado

A área do quadrado pode ser calculada de maneira semelhante a área do retângulo já que o quadrado é um retângulo de lados iguais.
Então, a área de um quadrado de lado l será:



$$\boxed{A = l \,.\, l = l^2}$$

Exemplo:

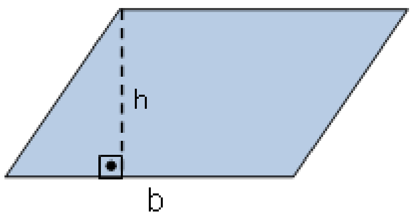
A lateral da tampa quadrada de uma caixa mede 12 cm. Qual a área desta tampa?
l = 12 cm
A $= l^2$
A $= (12\ cm)^2 = 12cm\ .12cm = 144\ cm^2$

Portanto , a área da tampa quadrada é 144 cm^2

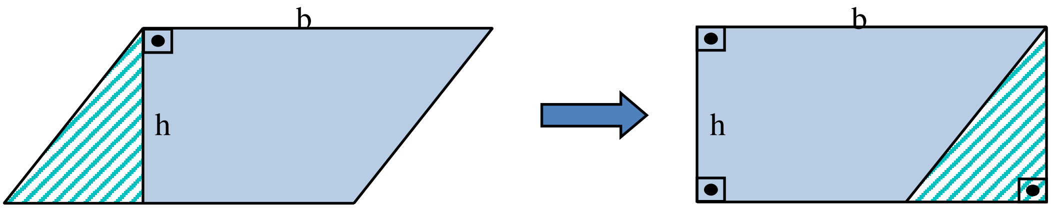
Área do Paralelogramo

Um quadrilátero cujos lados opostos são iguais e paralelos é denominado **paralelogramo**.

Na figura abaixo temos um paralelogramo em que b corresponde a medida da base e h, à medida da altura.



Observe que esse paralelogramo foi decomposto e, com suas partes, foi composto um retângulo de mesma base e altura.



Portanto, para calcular a área do paralelogramo, basta multiplicar a medida de sua base pela sua altura.

$$\boxed{A = b \cdot h}$$

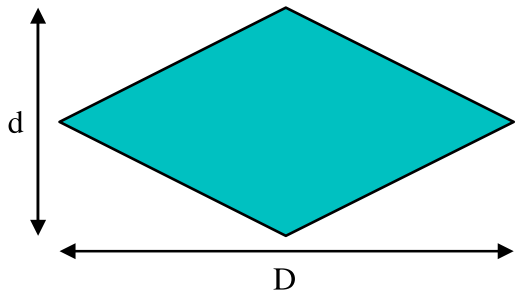
Exemplo:

Qual é a medida da área de um paralelogramo cujas medidas da base e da altura são respectivamente 10 m e 4 m?
$A = 10m \cdot 4m = 40\ m^2$
Portanto, a área do paralelogramo é 40 m^2

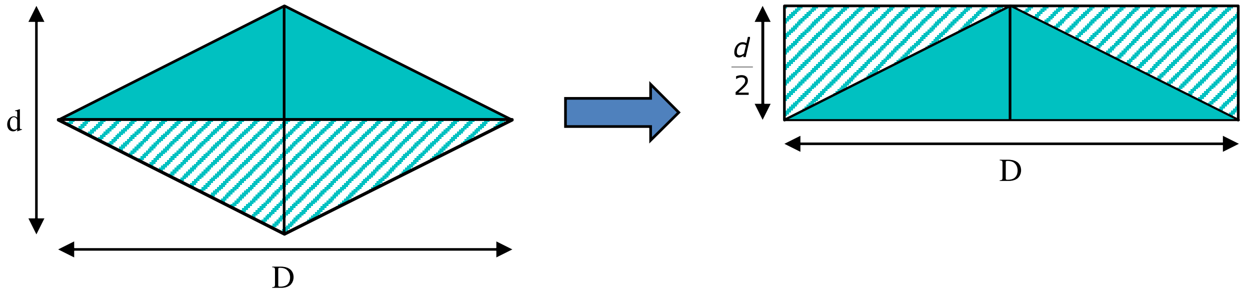
Área do losango

O **losango** é um tipo particular de paralelogramo. Neste caso além dos lados opostos serem paralelos, todos os quatro lados são iguais.

Na figura abaixo temos a representação de um losango em que **D** corresponde à medida da **diagonal maior** e **d**, à medida da **diagonal menor**.



Note que esse losango foi decomposto e, com suas partes, foi formado um retângulo de mesma área e com dimensões D e $\frac{d}{2}$.



Portanto, a área do losango é: $A = \frac{d}{2} \cdot D \Rightarrow A = \frac{D \cdot d}{2}$

$$\boxed{A = \frac{D \,.\, d}{2}}$$

Exemplo:

As diagonais de um losango medem 8 cm e 12 cm. Qual é a medida da sua área?

$$A = \frac{D \,.\, d}{2}$$

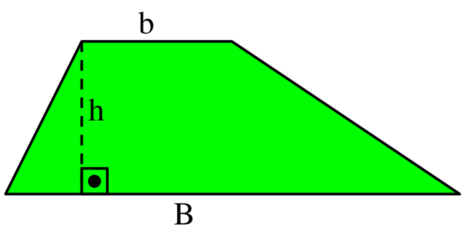
$$A = \frac{8 \,.\, 12}{2} = \frac{96}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

Portanto, a área do losango é 40 m^2 .

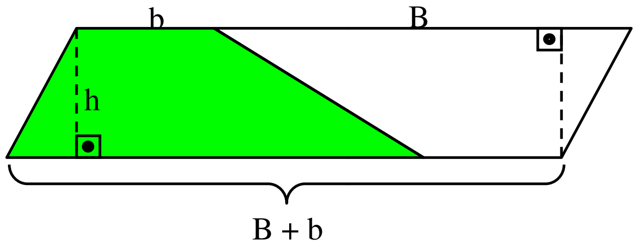
Área do trapézio

Na geometria o trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos e dois não paralelos.

Na figura abaixo temos um trapézio de altura h, base maior B e base menor b.



Com outro trapézio congruente a ele, podemos compor um paralelogramo de altura h e base B + b.



$$A = \frac{(B+b).\ h}{2}$$

Exemplo:

Determine a área de um trapézio de base maior 20 cm, base menor 10 cm e altura 8 cm.

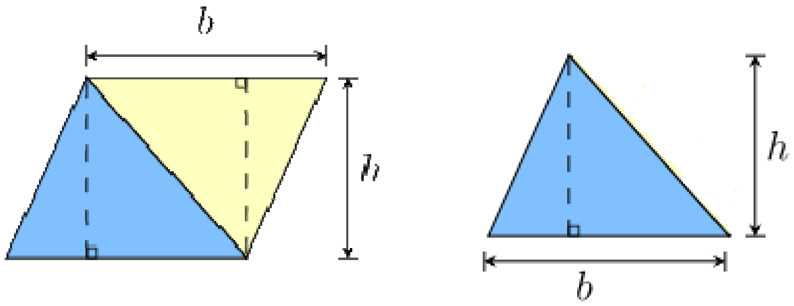
Substituindo na fórmula: $A = \frac{(B+b).\ h}{2}$, teremos:

$A = \frac{(20 + 10).\ 8}{2} = \frac{30\ .\ 8}{2} = 120\ cm^2$.

Portanto, a área do trapézio é $120\ cm^2$

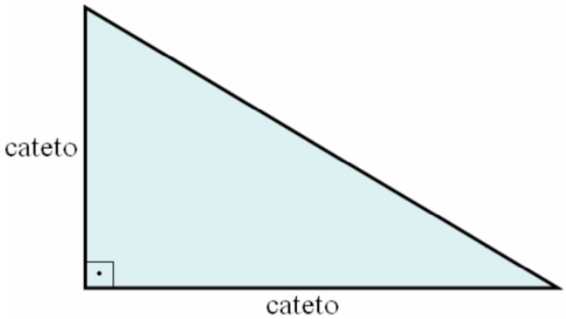
Área do triângulo

Um paralelogramo pode ser dividido em dois triângulo, portanto, para calcular a área do triângulo, basta multiplicar a medida de sua base pela sua altura e dividir por 2.



$$A = \frac{b.\ h}{2}$$

No caso do **triângulo retângulo**, a base e altura são os catetos, logo a área será o produto dos catetos dividido por dois.



$$A = \frac{cat \; . \; cat}{2}$$

Exemplo:

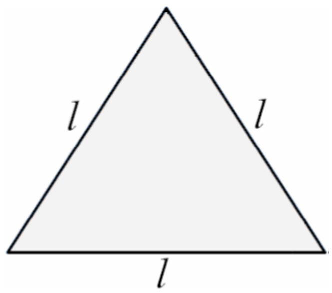
A medida da base de um triângulo é de 8 cm, visto que a medida da sua altura é de 4 cm, qual é a área desse triângulo?

$$A = \frac{b.\ h}{2}$$

$$A = \frac{8\ .\ 4}{2} = 16$$

Portanto, a área do triângulo é 16 cm^2.

No caso do **triângulo equilátero**, que possui os três lados iguais, podemos utilizar a seguinte fórmula:



$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Onde l representa a medida dos lados do triângulo.

Exemplo:

Os lados de um triângulo equilátero medem 6 cm. Qual é a área desse triângulo equilátero?

Segundo o enunciado temos:

$l = 6$

Substituindo na fórmula:

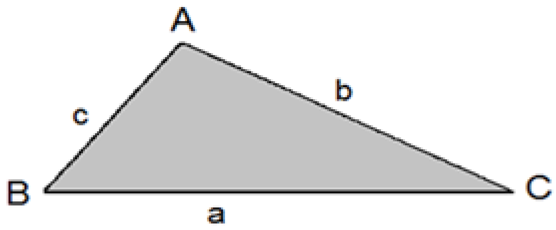
A = $\frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

Como $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, temos:

9 **.** 1,73 = 15,57

Portanto, a área do triângulo é aproximadamente 15,57 cm^2.

Conhecendo os três lados(a, b e c) de um triângulo, sua área pode ser calculada pela seguinte fórmula chamada de Heron:

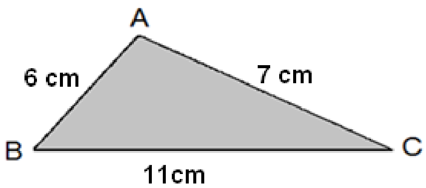


$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Onde p é o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$

Exemplo:

Determine a área do triângulo abaixo:



Como o triângulo possui as medidas de todos os lados, podemos aplicar a fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Onde a = 7 cm, b = 6 cm e c = 11 cm. Em seguida, iremos determinar o valor

de p = $\frac{6+7+11}{2} = \frac{24}{2}$ = 12 cm.

Assim, p – a = 12 – 7 = 5 cm, p – b = 12 – 6 = 6 cm e p – c = 12 – 11 = 1 cm. Substituindo na fórmula, teremos:

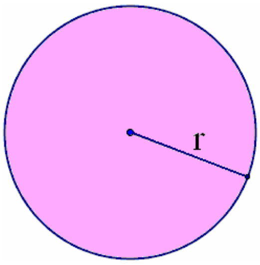
$A = \sqrt{12 \, . \, 5 \, . \, 6 \, . \, 1} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$ cm^2.

Como $\sqrt{10} \cong 3{,}16$, temos:

6 . 3,16 = 18,96 cm^2

Portanto, a área do triângulo é aproximadamente 18,96 cm^2.

Área do círculo



Para calcularmos a área do círculo, utilizamos a expressão matemática:

$$\boxed{A = \pi \, . \, r^2}$$

Onde r é o raio do circulo, que é a distância entre o centro e a sua extremidade e a letra grega π (pi), corresponde , aproximadamente, 3,14.

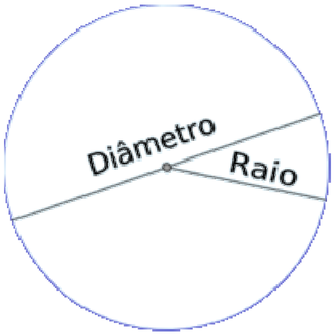
Exemplo:

Determine quantos metros quadrados de grama são necessários para preencher uma praça circular com raio medindo 30 metros.

$A = \pi \, . \, r^2$
$A = 3{,}14 \, . \, 30^2$
$A = 3{,}14 \, . \, 900$
$A = 2826$ m^2

Portanto, serão necessários 2826 m^2 de grama.

Certos problemas fornecem o diâmetro do circulo para cálculo da área. O diâmetro é igual a duas vezes o raio (d = 2r). Podemos dizer também que o raio é a metade do diâmetro($r = \frac{d}{2}$).



Exemplo:

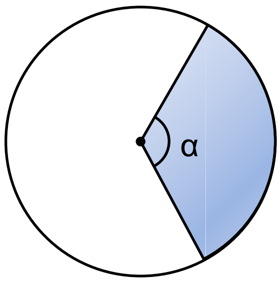
Um prato tem 24 cm de diâmetro, qual deverá ser sua área?

Como informado no enunciado, ao diâmetro do prato é igual a 24 cm, o que nos leva a concluir que o seu raio é igual a 12 cm, que corresponde a metade do diâmetro.

$A = \pi \cdot r^2$
$A = 3{,}14 \cdot 12^2$
$A = 3{,}14 \cdot 144$
$A = 452{,}16\ m^2$

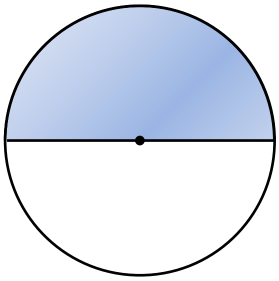
Portanto, a área do prato é $452{,}16\ m^2$

Área do setor circular

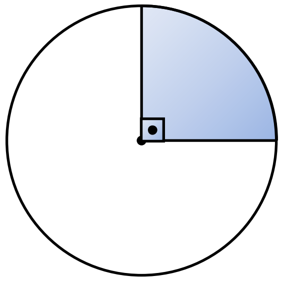


Sabemos que a área de um círculo é diretamente proporcional ao tamanho do seu raio e é obtida pela fórmula $\pi.r^2$. O **setor circular** é uma parte do círculo limitada por dois raios e um arco de circunferência (veja figura acima). Sua área é proporcional ao ângulo central α. Por exemplo, um setor circular cujo ângulo central é 180º (metade de 360º), sua área é a metade da área do círculo $\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)$ ou seja, um semicírculo. Se o ângulo central for 90º (um quarto de 360º) sua área será $\frac{\pi r^2}{4}$.

ângulo central 180º



ângulo central 90º



Partindo dessa associação podemos determinar a área de qualquer setor circular (A), através de uma simples regra de três. Observe:

360º ------------- π. r²
α ------------- A_{setor}

$$\boxed{A = \frac{\pi . r^2 \alpha}{360}}$$

Exemplo:

Determine a área do setor circular com ângulo central de 45º e raio 8 cm.

$$A = \frac{\pi . r^2 \alpha}{360}$$

r = 8 cm

α = 45º

Considerando $\boldsymbol{\pi}$ = 3,14, temos:

$$A = \frac{3{,}14 \; . \; 8^2 . \; 45}{360}$$

$$A = \frac{3{,}14 \; . \; 64 . \; 45}{360}$$

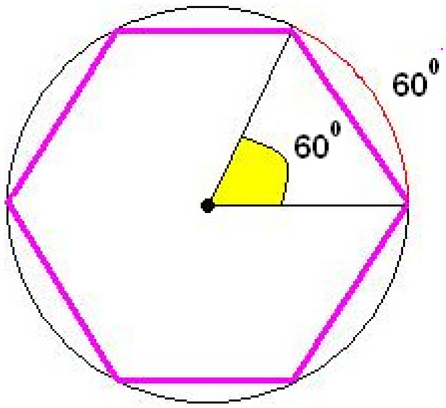
A = 25,12 cm²

Portanto, a área do setor circular é 25,12 cm².

Área do hexágono regular

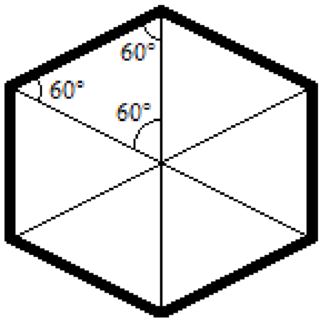
Hexágono é uma figura plana que possui 6 lados. Se ele for regular, esses lados deverão ter a mesma medida, portanto, **hexágono regular** é uma figura plana que possui 6 lados com a mesma medida.

O **hexágono regular inscrito** numa circunferência irá dividi-la em seis arcos de 60° (360°**:** 6 = 60°).
Como o valor do ângulo central é igual a medida do arco, temos que o ângulo central também mede 60°.



É importante observar que o lado do hexágono é igual ao raio da circunferência.

Assim, podemos dizer que a região limitada por um hexágono regular é formada por seis triângulos equiláteros .



Como a área do triângulo eqüilátero é dada por: A = $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

A área do hexágono regular será:

$$A = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}}$$

Exemplo:

Determine a área de um hexágono regular de lado 8 cm.

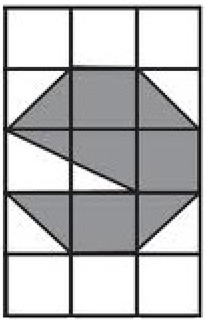
$$A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{3\,.\,8^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\,.\,64\ \sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3}$$

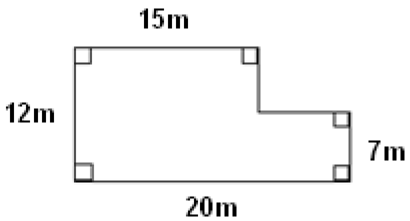
Portanto, a área do hexágono regular é $96\sqrt{3}$ cm^2.

Exercícios

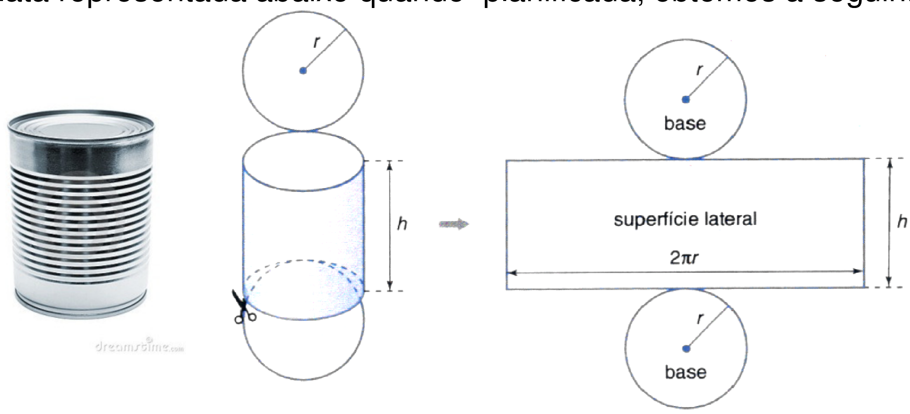
1) Cada quadradinho na figura tem 1m^2 de área. Determine a área da região pintada.



2) A área do terreno representado pela figura abaixo é:

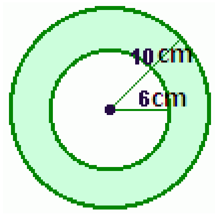


3) A lata representada abaixo quando planificada, obtemos a seguinte figura:

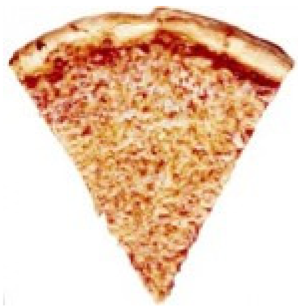


Quantos centímetros quadrados aproximadamente de chapa de metal são necessários para fabricar a lata, sabendo que o raio **r** da base mede 16 cm e a altura **h** mede 30 cm? (Use π = 3,14)

4) Quantos centímetros quadrados de metal são necessários para fazer uma arruela cujas dimensões em centímetros estão representadas na figura.



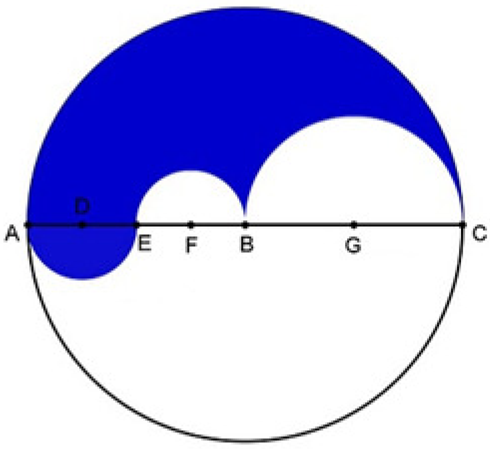
5) O pedaço de pizza abaixo tem 60º de ângulo central e raio 10 cm. Nessas condições:



a) Determine a área aproximada do pedaço da pizza.

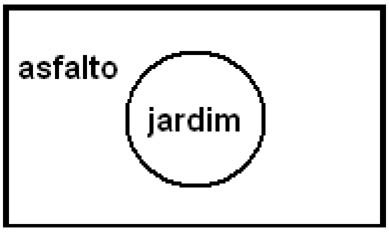
b) Se o pedaço de pizza custa R$ 3,00, quanto deverá custar a pizza inteira?

6) Determine a área da região pintada da figura abaixo, sabendo-se que $\overline{AD}$ = 2 cm, $\overline{EF}$ = 2 cm e $\overline{BG}$ = 4 cm.



7) Uma praça retangular tem um jardim central circular. O comprimento e a largura da praça medem, respectivamente, 120m e 80m, e o diâmetro do jardim mede 40 m. A área da praça asfaltada mede: Dado: $\pi = 3,14$

a) 1256 m^2
b) 7088 m^2
a) 8344 m^2
b) 9600 m^2
e) 10856 m^2



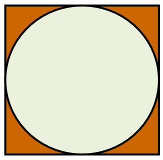
8) A figura abaixo representa um tampão de mesa quadrangular coberta por uma toalha circular de raio 40 cm. A área do tampão de mesa que ficou de fora da tolha é: (Use $\pi = 3,14$)

a) 1376 cm^2

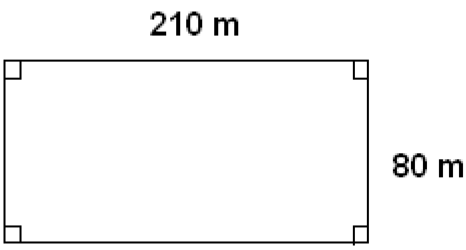
b) 1424 cm^2

a) 1726 cm^2

b) 3424 cm^2



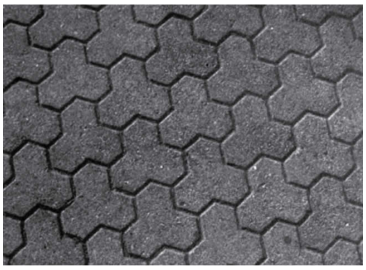
9) A área esquematizada abaixo representa um pátio para estacionamento de veículos. Reservando-se um espaço retangular mínimo de 3 metros por 5 metros para cada um, quantos veículos no máximo podem-se ali estacionar?

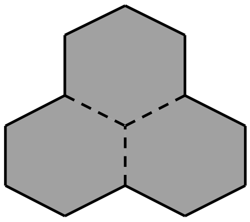


a) 1050 b) 1255 c) 1160 d) 1120 e) 1070

10) Um bairro do Rio de Janeiro tem 16.000.000 m^2 de área. Se o bairro tivesse a forma de um quadrado, então a medida de seus lados seria.
a) 4000 m b) 8000 m c) 800 m d) 400 m e) 4 000 000 m

11) Cada pastilhas da figura abaixo é formada por 3 hexágonos regulares de 10 cm de lado cada.





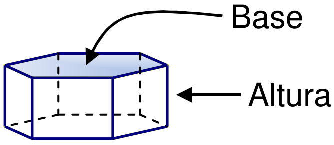
Para cobrir um quintal de 4 m de largura por 7 m de comprimento, o número de pastilhas que teremos que dispor será aproximadamente:

a) 350 b) 490 c) 360 d) 476 e) 570

Desafio

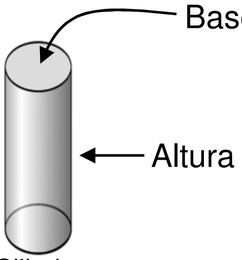
Para calcular o volume de um prisma (figura A) ou de um cilindro (figura B) multiplicamos a área da base pela sua altura.

Figura A



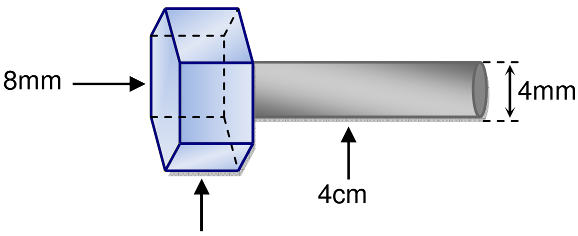
Prisma Hexagonal

Figura B



Cilindro

Uma indústria recebeu um pedido de 3000 peças com a forma e as dimensões indicadas na figura. Quantos centímetros cúbicos de metal serão necessários na fabricação dessas peças? (Use $\sqrt{3}$ = 1,73 e π = 3,14.)



Lembrete: 1cm = 10 mm
1 cm^3 = 1000mm^3

Bibliografia

BARROSO,Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática. São Paulo, Moderna, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. Curso de Matemática. São Paulo, Moderna, s.d.

FACHINI, Walter. Matemática; volume único. São Paulo, Saraiva,1996.
GIOVANNI, José Rui; BONJORNO, José Roberto. Matemática. São Paulo, FTD,1992.

IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática; volume único. São Paulo, Atual, 2007.
IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática e Realidade. São Paulo, Saraiva, 2009.
IEZZI, Gelson ET ALII. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo, Saraiva,2010.

MARCONDES, Carlos Alberto ET AL. Matemática. São Paulo, Ática, 2000.
MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática antes e depois. São Paulo, Saraiva, 2006.

MUNOHZ, Ainda, F. da Silva; IKIEZAK, Iracema Mori. Elementos de Matemática. São Paulo, Saraiva, 1990.

RIBEIRO, Jackson. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia. São Paulo, SCIPIONE, 2011.

Sites:

http://www.somatematica.com.br
Escola 24 horas - http://www.escola 24h.com.br
http://www.matematica.com.br